

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

MIRCEA – EUGEN TEODORESCU

STATICA CONSTRUCTIILOR

STRUCTURI STATIC DETERMINATE

Universitatea Tehnica de Constructii Bucuresti

- 2000 –

În ședința de catedră din 03.04.2000 s-a discutat lucrarea “*Statica Construcțiilor. Structuri static determinate*” elaborată de s.l.dr.ing. Mircea-Eugen Teodorescu și s-a aprobat multiplicarea ei pe plan local.

PREFAȚĂ

Cursul *"Statica Construcțiilor. Structuri static determinate"* este destinat studenților din anul II de la Facultatea de Hidrotehnică.

Cursul este alcătuit din 6 capitole și anume:

Capitolul I - Aspecte generale ale calculului structurilor de rezistență. În acest capitol sunt prezentate obiectul de studiu al Staticii Construcțiilor, schematizările care se fac în vederea obținerii modelului matematic, ipotezele simplificatoare folosite în calculul liniar elastic, noțiuni și teoreme generale folosite în calculul structurilor. De asemenea sunt prezentate relațiile folosite pentru calculul deplasărilor structurilor elastice produse atât de forțe cât și de acțiunea variației de temperatură și a cedărilor de reazeme.

Capitolul II - Structuri static determinate alcătuite din bare drepte. În acest capitol este prezentat modul de rezolvare al structurilor static determinate alcătuite din bare drepte. Tipurile de structuri analizate sunt: grinzile simple (grinda în consolă, grinda simplu rezemată și grinda cu consolă), grinzile compuse (Gerber) și cadrele plane (de formă oarecare și simetrice).

Capitolul III – Grinzi cu zăbrele. În acest capitol este prezentat modul de alcătuire a grinzilor cu zăbrele, ipotezele simplificatoare admise care stau la baza calculului, precum și metode de determinare a eforturilor din bare. Pentru grinzile cu zăbrele având tălpi paralele și încărcate cu forțe verticale se prezintă analogia cu grinda simplu rezemată corespunzătoare.

Capitolul IV – Arce static determinate. În acest capitol sunt prezentate principalele tipuri de arce static determinate din punct de vedere al formei și al alcătuirii precum și al calculului eforturilor.

Capitolul V – Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual în calculul structurilor static determinate. În acest capitol este prezentat principiul lucrului mecanic virtual precum și modul de utilizare în calculul diferitelor categorii de structurilor static determinate: grinzi compuse, cadre plane și grinzi cu zăbrele.

Capitolul VI – Linii de influență. În acest capitol sunt prezentate aspectele teoretice și practice privind trasarea a liniilor de influență.

Aspectele teoretice sunt însoțite de numeroase exemple numerice care au rolul de ajuta studenții în pregătirea lor.

Autorul

CAPITOLUL I

ASPECTE GENERALE ALE CALCULULUI STRUCTURILOR DE REZISTENȚĂ

1.1. OBIECTUL DE STUDIU

Statica Construcțiilor este o ramură a Mecanicii Solidului Deformabil având ca obiect de studiu calculul eforturilor și deplasărilor structurilor de rezistență formate din bare. Prin structură de rezistență se înțelege ansamblul constructiv format din elemente de rezistență (stâlpi și grinzi) capabil să preia încărcările ce îi revin, asigurând exploatarea normală a construcției.

Fenomenul real al comportării structurilor de rezistență sub acțiunea încărcărilor este un fenomen complex. Pentru studierea acestuia este necesară admiterea unor schematizări și a unor ipoteze simplificatoare care să conducă la rezultate satisfăcătoare din punct de vedere practic. Astfel, în urma schematizărilor făcute rezultă **modelul fizic** al structurii reale, iar prin adoptarea ipotezelor simplificatoare se obține **modelul de calcul**.

În general toate structurile de rezistență au o configurație spațială și o schematizare riguroasă conduce la modele spațiale. În marea majoritate a cazurilor, prin neglijarea efectului unor legături de importanță secundară se poate ajunge la descompunerea ansamblului în structuri plane și în consecință la o reducere substanțială a calculului. Prezentul curs va trata numai **structurile plane** încăcate în planul lor.

1.2. SCHEMATIZĂRI ADMISE ÎN CALCUL

Schematizările admise în calcul se referă la încărcări, la legăturile interioare și exterioare, la alcătuirea structurii de rezistență, la comportarea materialelor de construcții și la comportarea structurilor de rezistență.

1.2.1. Schematizarea încărcărilor

Încărcările ce acționează asupra construcțiilor sunt extrem de variate. Ele sunt: forțe, variații de temperatură, deplasări (cedări) de reazeme. În ceea ce privește modul de reprezentare a forțelor, acestea se împart în:

- forțe sau momente concentrate (fig. 1.1, a și b),
- forțe uniform distribuite (fig. 1.1,c),
- forțe cu distribuție liniară (fig. 1.1,d),

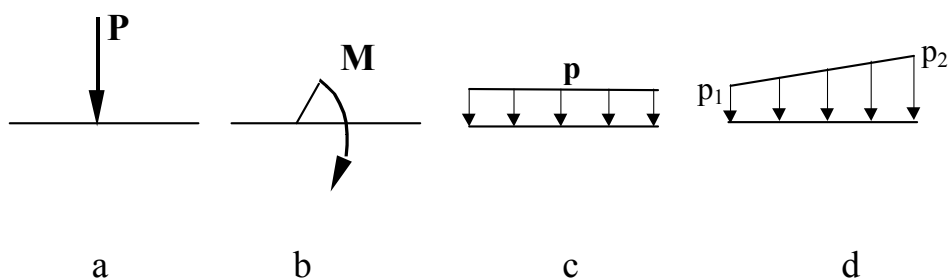


Fig. 1.1

Încărcările pot fi **aplicate static**, respectiv intensitățile lor cresc progresiv de la valoarea zero la valoarea reală și rămân constante în timp, sau **aplicate dinamic**, respectiv intensitățile variază rapid și imprimă o anumită accelerație structurii.

De asemenea încărcările pot avea o **poziție fixă** sau **mobilă** (acțiunea vehiculelor pe un pod),

1.2.2. Schematizarea legăturilor

Pentru structurile plane, încărcate în planul lor, legăturile existente între elementele componente sau cu baza de sprijinire pot fi schematizate prin: **reazemul simplu**, **articulația plană** și **încadrarea plană**. Aceste legături se caracterizează prin faptul că împiedică – parțial sau total – deplasările față de punctul de rezemare. Pentru a defini caracteristicile legăturilor, se reamintește faptul că un corp în plan are trei grade de libertate: două translații și o rotire.

Reazemul simplu (fig. 1.2,a) este o legătură care suprimă translația pe o direcție perpendiculară pe planul de rezemare și permite translația liberă pe o direcție cuprinsă în planul de rezemare și rotirea în jurul axei normale pe plan în punctul de rezemare. Echivalentul mecanic al reazemului simplu este o forță care are punctul de aplicație și direcția cunoscute, dar nu i se cunoaște mărimea (fig. 1.2,a). Reazemul simplu este un reazem mobil și reprezintă o legătură simplă.

Articulația plană (fig. 1.2,b) este o legătură care suprimă translația pe orice direcție și lasă liberă numai rotirea în jurul unei axe normale pe plan în punctul de rezemare. Astfel articulația reprezintă un reazem fix la translație. Echivalentul mecanic al unei articulații plane este o forță cu punct de aplicație cunoscut, având direcția (unghiul α) și mărimea (R) necunoscute. În calculul practic necunoscutele R și α se înlocuiesc cu proiecțiile reacțiunii pe două direcții normale (H și V). Articulația este echivalentă cu două legături simple.

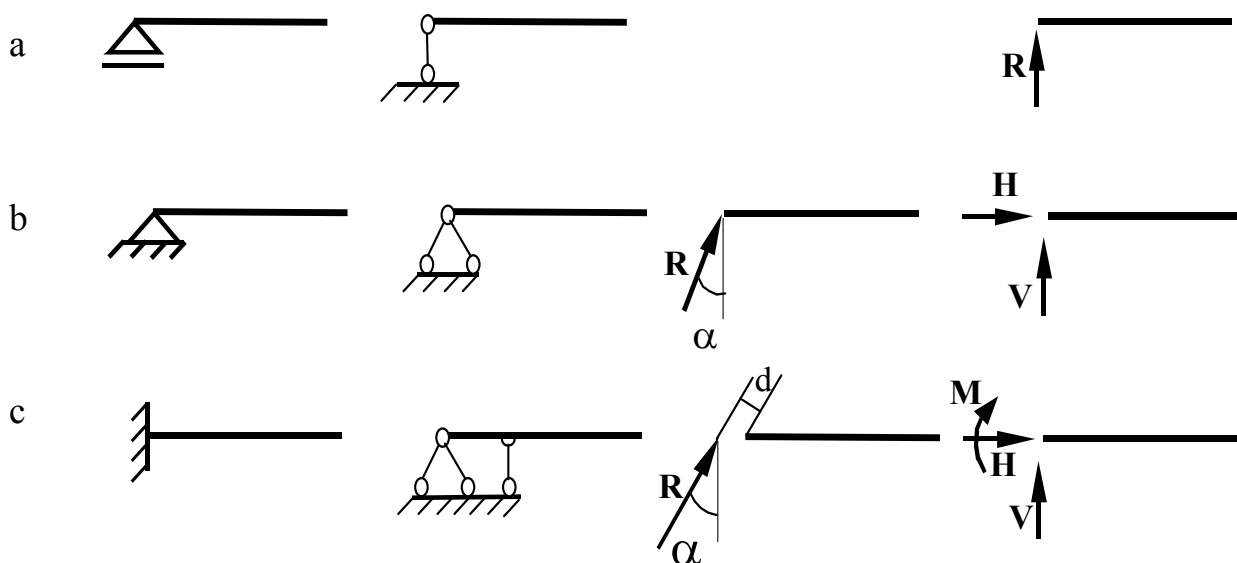


Fig. 1.2

Încăstrarea plană (fig. 1.2,c) este o legătură care suprimă atât translațiile pe orice direcție cât și rotirea în raport cu o axă normală pe plan în punctul de rezemare. Echivalentul mecanic al unei încăstrări plane este o forță careia nu i se cunoaște nici punctul de aplicare (distanța d până la centrul de greutate al secțiunii de încăstrare), nici mărimea (R) și nici direcția (unghiul α). În calculul practic forța se reduce în raport cu centrul de greutate al secțiunii din încăstrare, obținând o forță de mărime și direcție necunoscută (R, α) și un moment M . Deoarece forța R se poate descompune în cele două componente H și V , rezultă că cele trei necunoscute utilizate în calculul practic sunt H, V și M . Încăstrarea este echivalentă cu trei legături simple.

1.2.3. Schematizarea elementelor și structurilor de rezistență

Elementele și structurile de rezistență, care fac obiectul Staticii Construcțiilor sunt formate din bare drepte sau curbe. Barele se schematizează prin axa lor. Axa unei bare reprezintă succesiunea centrelor de greutate ale secțiunilor transversale.

Ținând cont de configurația lor geometrică, structurile plane se împart în: grinzi, cadre plane, grinzi cu zăbrele și arce.

Grinzile sunt bare drepte supuse în general încărcărilor normale pe axa lor. Grinzile pot fi grinzi simplu rezemate (fig.1.3,a), grinzi în consolă (fig.1.3,b), grinzi Gerber sau compuse (fig.1.3,c) și grinzi continue (fig.1.3,d).

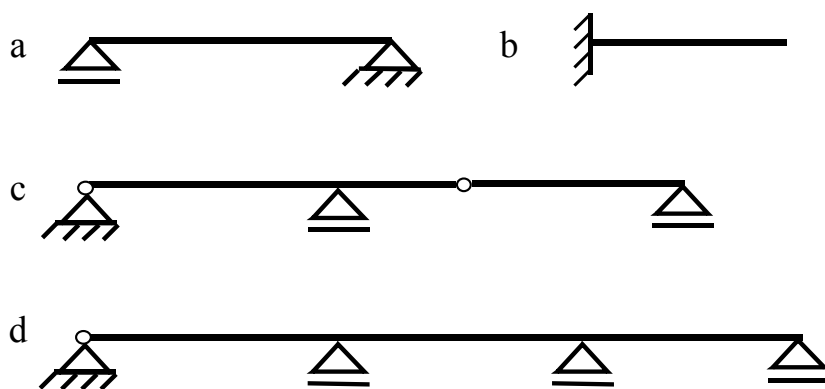


Fig. 1.3

Cadrelle plane (fig. 1.4) sunt structuri formate din bare drepte dispuse în două sau mai multe direcții și conectate între ele în noduri rigide sau articulate.

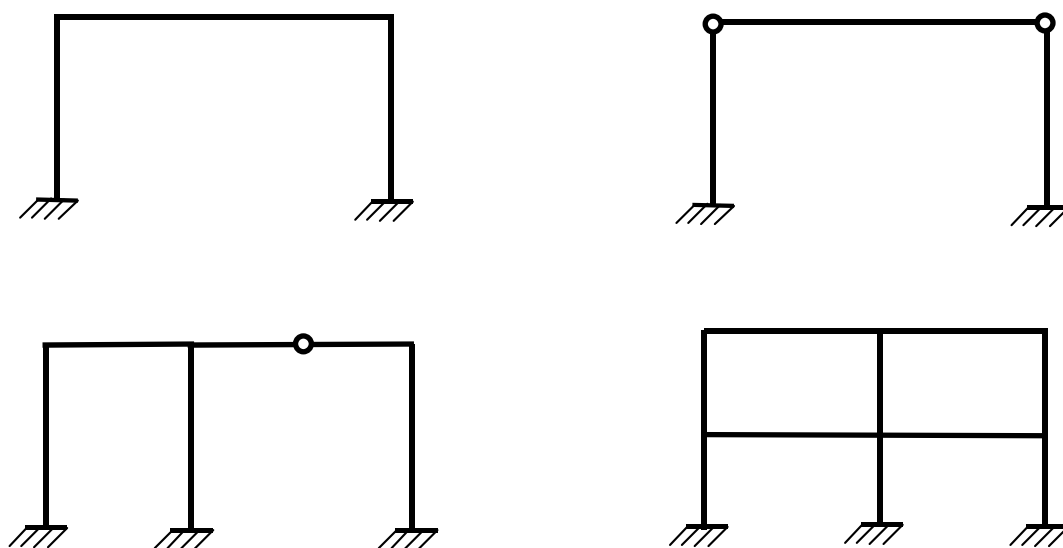


Fig. 1.4

Grinzile cu zăbrele (fig. 1.5,a,b) sunt structuri realizate din bare drepte conectate între ele prin noduri articulate. Grinzile cu zăbrele sunt încărcate numai cu forțe aplicate în noduri.

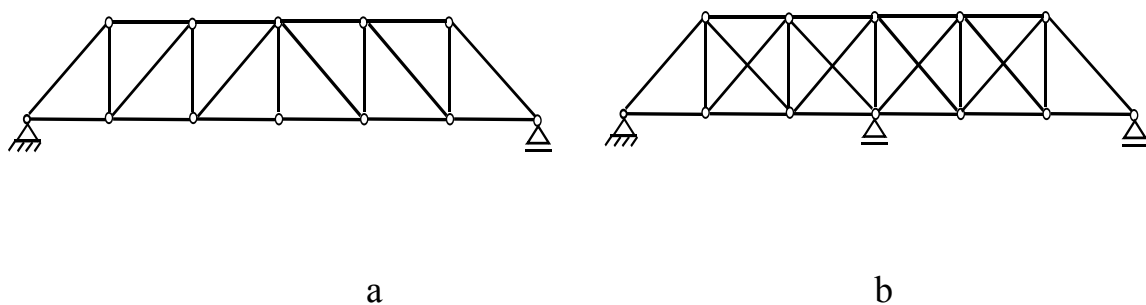


Fig. 1.5

Arcele sunt bare sau sisteme de bare curbe încărcate în planul lor. în figura 1.6,a este prezentat un arc triplu articulată, iar în figura 1.6,b un arc dublu încastrat.

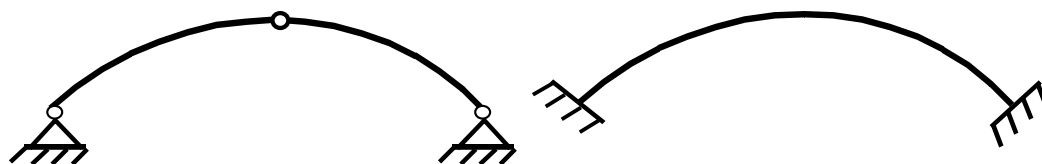


Fig. 1.6

1.2.4. Schematizarea comportării materialelor

Studiul modului de comportare a materialelor de construcții se realizează prin încercări experimentale. Pe baza acestor încercări se determină caracteristicile fizico-mecanice și curba caracteristică, ca elemente specifice fiecărui material. În vederea utilizării proprietăților fizico-mecanice ale materialului, în calculul structurilor, curbele caracteristice reale se schematizează.

În figura 1.7 se prezintă schematizările cele mai frecvent utilizate în practică ale curbelor caracteristice. Aceste curbe reprezintă relația tensiune-deformație specifică și descriu comportarea materialului la o anumită solicitare.

Astfel pot fi schematizate comportări ale materialelor elastice (liniar elastice în figura 1.7,a și neliniar elastică în figura 1.7,b), elasto-plastice (fig. 1.7,c) sau ideal elasto-plastice (fig. 1.7,d).

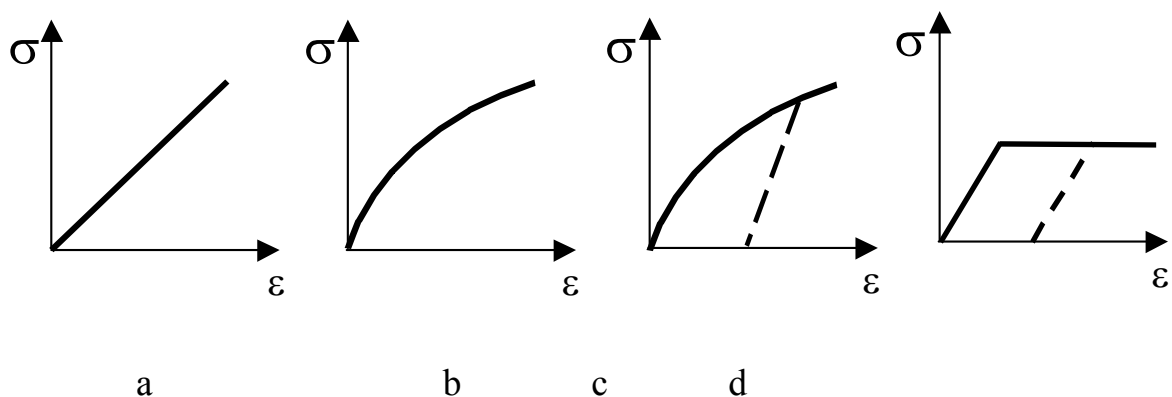


Fig. 1.7

Materialele pot avea o comportare elastică până la o valoare limită a efortului unitar. Structurile de rezistență care lucrează în aceste limite sunt **sisteme conservative**. O schematizare mai corectă a comportării materialelor este cea elasto-plastică. În cazul solicitărilor la un nivel corespunzător comportării elasto-plastice a materialului, o parte din energia acumulată de structură este disipată prin curgerea materialului. În această situație structurile reprezintă sisteme neconservative (disipatoare de energie).

1.2.5. Schematizarea comportării elementelor și structurilor de rezistență

Sub acțiunea încărcărilor exterioare, structurile de rezistență se deformează, iar în material iau naștere eforturi. Structurile pot avea o comportare elastică sau neelastică după răspunsul pe care-l dau la acțiunea încărcărilor. Astfel dacă după înlăturarea încărcărilor aplicate pe structuri, acestea revin la poziția inițială, structurile au o comportare elastică și deformația structurilor este elastică, iar dacă după înlăturarea încărcărilor de pe structuri, acestea nu revin la poziția inițială, în structuri se păstrează unele deformații remanente, structurile se află în domeniul elasto-plastic, iar deformațiile remanente sunt deformații plastice.

Comportarea structurilor depinde de natura materialului folosit la realizarea lor. Între forțele exterioare și deplasările pe direcțiile lor, precum și între eforturile secționale și deplasările pe direcțiile lor există o anumită relație de legătură. Această relație se poate schematiza în mai multe moduri. Pentru structurile curent utilizate în construcții, la care comportarea materialului a fost schematizată în figura 1.7, relația forță-deplasare se poate schematiza ca în figura 1.8.

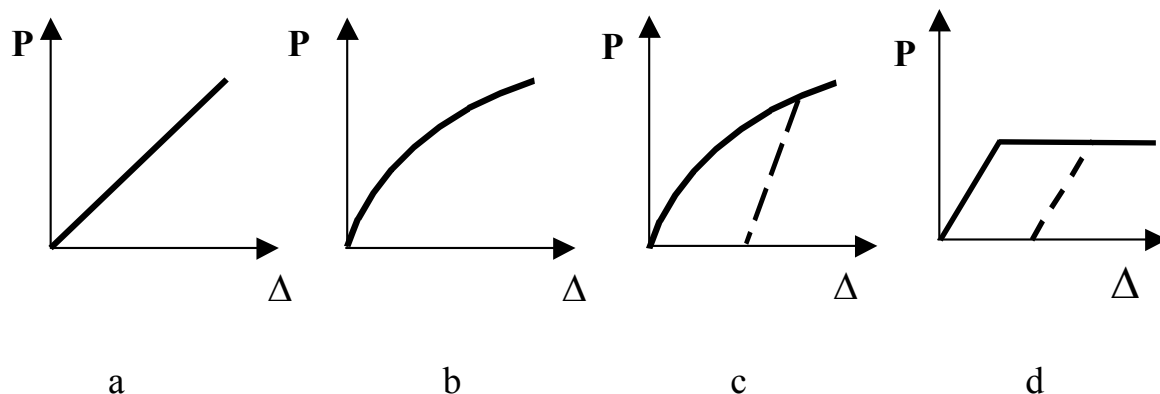


Fig. 1.8

1.3. IPOTEZE SIMPLIFICATOARE

Admiterea unei anumite combinații de relații efort unitar-deformație specifică și forță-deplasare conduce la obținerea unui anumit tip de calcul al structurilor.

În calculul de ordinul I, liniar elastic se admit următoarele *ipoteze simplificatoare*:

- materialul este continuu, omogen și izotrop. Aceste proprietăți sunt invariabile în timp;

- materialul are o comportare liniar elastică (fig. 1.7,a), adică se admite proporționalitatea între eforturi unitare și deformații specifice (legea lui Hooke, $\sigma = E\varepsilon$ și/sau $\tau = G\gamma$);

- relația forță-deplasare este o relație liniară (fig. 1.8,a);

- relația deformație specifică - deplasare este o relație liniară. Admițând că u_x și v_x sunt deplasările pe direcția axei barei și pe normala la axa barei ale unui punct, relația deformație specifică-deplasare este:

- pentru bare solicate axial $\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ (1.1,a)

- pentru bare solicate la încovoiere $\varepsilon_x = y \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ (1.1,b)

- pentru bare solicate la încovoiere cu forță axială

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (1.1,c)$$

- forțele sunt aplicate static. Ele cresc lent de la valoarea zero la valoarea finală cu viteză foarte mică și de aceea energia cinetică a corpului este neglijabilă.

- se admite ipoteza lui Bernoulli prin care secțiunile plane și normale pe axa barei înainte de deformare rămân plane și normale pe axa barei și după deformare.

Dacă se admit aceste ipoteze simplificatoare, rezultă o serie de **consecințe** foarte importante:

- pentru elementele și structurile de rezistență utilizate în construcții, deplasările secțiunilor transversale sunt mici, deci condițiile de echilibru static se pot exprima prin ecuațiile Mecanicii teoretice (care au fost stabilite pentru corpul rigid).

- deoarece relația forță-deplasare este liniară și deplasările sunt foarte mici, se poate admite *principiul suprapunerii efectelor*, adică efectul unei forțe asupra structurii nu este influențat de efectul altor forțe aplicate concomitent pe structură, ceea ce revine la a determina efectul total prin însumarea efectelor parțiale. În figura 1.9 se prezintă modul de aplicare a principiului suprapunerii efectelor.

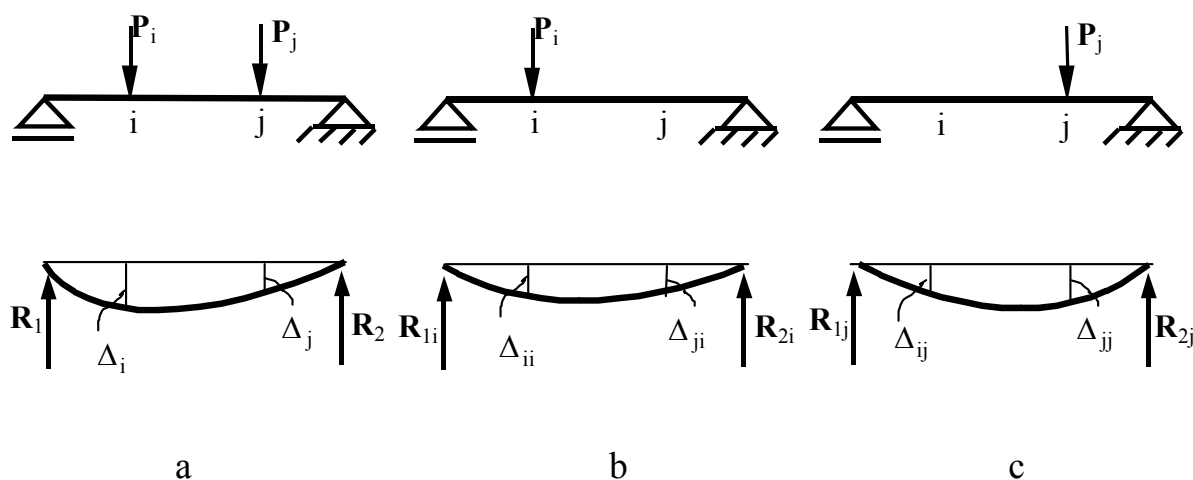


Fig. 1.9

Dacă grinda dreaptă din figura 1.9,a este încărcată concomitent cu forțele P_i și P_j în reazeme vor apărea reacțiunile R_1 și R_2 , iar deplasările secțiunilor i și j sunt Δ_i respectiv Δ_j .

Grinda se consideră în următoarele două situații de încărcare:

- în prima situație, grinda este încărcată numai cu forța P_i (fig. 1.9,b). Sub acțiunea acestei încărcări în reazeme apar reacțiunile R_{1i} și R_{2i} , iar pe direcțiile i și j se produc deplasările Δ_{ii} și Δ_{ji} ,

- în a doua situație grinda este încărcată numai cu forța P_j (fig. 1.9,c). Sub acțiunea acestei încărcări în reazeme apar reacțiunile R_{1j} și R_{2j} , iar pe direcțiile i și j , se produc deplasările Δ_{ij} și Δ_{jj}

Suprapunând efectele rezultă:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{1i} + R_{1j} \quad ; \quad R_2 = R_{2i} + R_{2j} \\ \Delta_i &= \Delta_{ii} + \Delta_{ij} \quad ; \quad \Delta_j = \Delta_{ji} + \Delta_{jj} \end{aligned} \quad (1.2)$$

aceleași valori pentru reacțiuni și deplasări obținându-se dacă grinda este încărcată concomitent cu forțele P_i și P_j .

- structura de rezistență este un **sistem conservativ**, adică energia de deformare acumulată pentru trecerea în forma deformată este integral consumată pentru revenirea la forma inițială nedeformată, când încărcarea este îndepărtată.

- deoarece relația forță-deplasare este liniară (fig. 1.10), se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P_i}{\Delta_i} \quad \text{sau} \quad P_i = K \Delta_i \quad (1.3)$$

unde **K** reprezintă **rigiditatea structurii**, adică valoarea forței **P_i** pentru o deplasare $\Delta_i = 1$

De asemenea se poate scrie:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta_i}{P_i} \quad \text{sau} \quad \Delta_i = F P_i \quad (1.4)$$

unde **F** reprezintă **flexibilitatea structurii**, adică valoarea deplasării Δ_i pentru o forță $P_i = 1$.

Din relațiile (1.3) și (1.4) se poate deduce că $F = \frac{1}{K}$ sau $K = \frac{1}{F}$. Din figura 1.10 se poate constată că $\operatorname{tg} \beta$ și $\operatorname{tg} \gamma$ sunt constante, ele nedepinzând de valoarea forțelor, ci numai de caracteristicile structurii, deci *rigiditatea și flexibilitatea sunt caracteristici proprii ale structurii în calculul de ordinul I.*

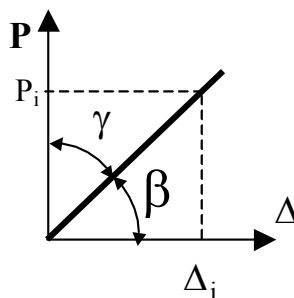


Fig. 1.10

1.4. CLASIFICAREA STRUCTURILOR

Structura de rezistență a unei construcții este alcătuită din mai multe elemente schematizate legate între ele și cu terenul printr-un număr suficient de legături care să-i asigure invariabilitatea geometrică și fixarea de teren.

Structurile de rezistență se clasifică în structuri static determinate și în structuri static nedeterminate.

Structurile static determinate sunt structurile care au un număr minim de legături necesare asigurării invariabilității geometrice și fixării de baza de susținere.

Structurile static nedeterminate sunt structurile care au un număr mai mare de legături decât numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării de baza de susținere.

Din Mecanica Teoretică se știe că pentru un sistem de forțe coplanare se pot scrie trei ecuații de echilibru static, iar dacă structura în ansamblu este în echilibru, atunci și orice parte a sa este în echilibru. Rezultă că pentru o structură formată din c corpuri, dacă se pun în evidență forțele din legăturile interioare și exterioare (reacțiunile) se pot scrie $3c$ ecuații de echilibru static. Comparând numărul ecuațiilor de echilibru static cu numărul necunoscutelor (forțele de legătură și reacțiunile) rezultă dacă structura este static determinată sau static nedeterminată.

Dacă se notează cu l numărul legăturilor interioare, cu r numărul reacțiunilor, cu c numărul corpurilor și cu d diferența între numărul necunoscutelor și numărul ecuațiilor de echilibru static, între aceste elemente se poate scrie următoarea relație:

$$d = l + r - 3c \quad (1.5)$$

Ținând seama că legăturile între corpuri și între corpuri și baza de susținere pot fi încastrări, articulații sau reazeme simple, rezultă că:

$$l + r = 3I + 2A + S \quad (1.6)$$

unde I reprezintă numărul de încastrări, A numărul de articulații simple, iar S numărul de reazeme simple.

De remarcat faptul că prin articulație simplă se înțelege articulația dintre două corpuri. Dacă în aceeași articulație se întâlnesc mai multe corpuri - cazul nodurilor la grinzile cu zăbrele - atunci numărul articulațiilor simple este egal cu numărul corpurilor mai puțin unul.

În aceste condiții relația (1.5) devine:

$$d = 3I + 2A + S - 3C \quad (1.7)$$

Dacă $d = 0$, structura este *static determinată*. În această situație structura are minimum de legături care-i asigură invariabilitatea geometrică. Pentru determinarea reacțiunilor și eforturilor se utilizează numai ecuațiile de echilibru static. Acest avantaj permite ca cele două probleme de bază ale Staticii Construcțiilor – calculul eforturilor și studiul poziției deformată – să devină independente una de alta.

Dacă $d > 0$, respectiv numărul forțelor de legătură este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru static, structura este *static nedeterminată*. Structura static nedeterminată este caracterizată prin gradul de nedeterminare statică care reprezintă tocmai numărul de legături în plus față de cel minim necesar pentru asigurarea invariabilității geometrice. Pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate este necesară scrierea unor ecuații suplimentare, în număr egal cu gradul de nedeterminare statică. Pentru aceasta se face apel la studiul poziției deformată a structurilor, respectiv la condiția de compatibilitate a deformatelor cu legăturile.

Dacă $d < 0$, respectiv numărul legăturilor simple este mai mic decât numărul de ecuații de echilibru, atunci structura reprezintă un *mecanism*. O astfel de situație trebuie evitată în practica structurilor de rezistență. Mecanismele se utilizează ca instrument de calcul pentru structurile static determinate și static nedeterminate.

Aplicarea relației (1.7) pentru identificarea tipului de structură este exemplificată la structurile din figura 1.11.

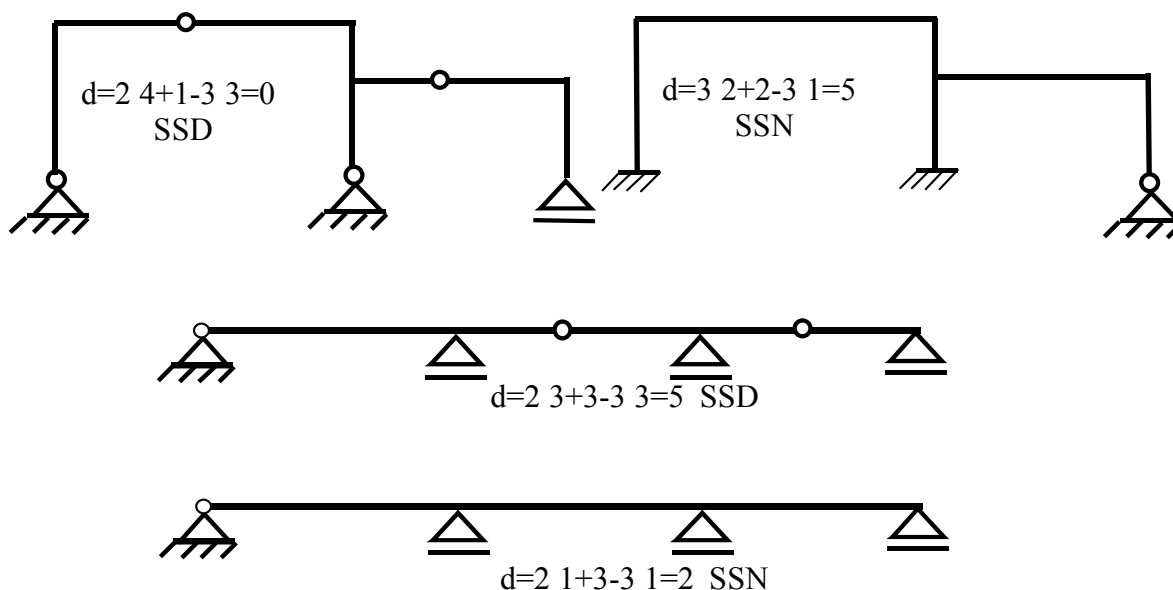


Fig. 1.11

Trebuie menționat că numai controlul numeric dat de relația (1.7) asupra ansamblului structurii nu este suficient pentru caracterizarea structurii. Astfel la structura din figura 1.12,b aplicând relația (1.7) se obține același rezultat ca la structura din figura 1.12,a. Diferența între cele două structuri constă în modul diferit de dispunere a legăturilor, ceea ce face ca la structura din figura 1.12,b să se obțină un grad de nedeterminare statică pe porțiunea 1-4 și un mecanism pe porțiunea 4-6. Rezultă că verificarea condiției (1.7), care mai reprezintă și condiția de determinare statică, trebuie făcută atât pe ansamblul structurii cât și pe substructurile componente ale acesteia.

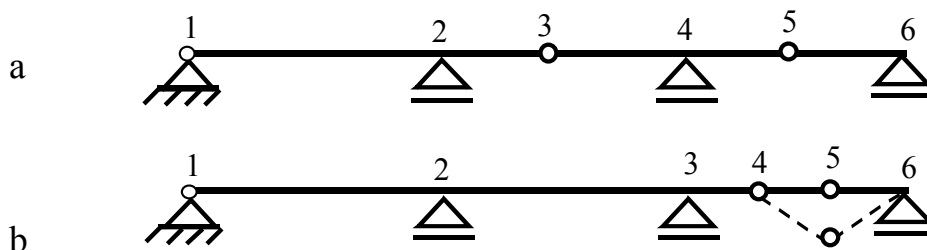


Fig. 1.12

Un alt aspect caracteristic pentru analiza structurilor este faptul că părțile componente pot fi părți principale sau părți secundare. O parte a structurii este numită principală dacă ea poate transmite spre baza de sprijinire integral încărcările care-i

revin. O parte a structurii este numită secundară dacă ea nu poate transmite integral spre baza de sprijinire încărcările care-i revin.

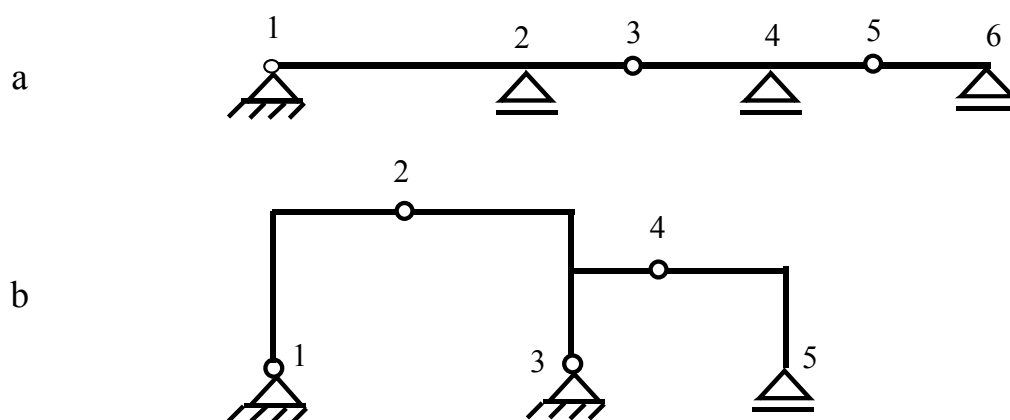


Fig.

1.13

Pentru exemplificare, grinda din figura 1.13,a (grinda Gerber) are ca parte principală grinda 1-2-3, iar ca parte secundară grinzile 3-4-5 și 5-6. Cadrul din figura 1.13,b are ca parte principală cadrul 1-2-3-4, iar ca parte secundară elementul 4-5.

1.5. ECHILIBRUL ÎN POZIȚIA DEFORMATĂ

Sub acțiunea încărcărilor exterioare structura de rezistență se deformează. În această poziție deformată se realizează echilibrul între încărcări și eforturi. Poziția deformată și starea de eforturi reprezintă răspunsul structurii la acțiunea încărcărilor exterioare. Răspunsul structurii poate fi caracterizat atât din punct de vedere calitativ cât și din punct de vedere cantitativ.

Calitativ răspunsul structurii este caracterizat prin faptul că forma deformată a structurii poate fi percepută vizual sau intuită (fig. 1.14)

Cantitativ răspunsul structurii este caracterizat prin valorile mărimilor fizice specifice calculului structurilor: deplasări,



Fig. 1.14

eforturi, deformații specifice, eforturi unitare.

Răspunsul structurii poate fi caracterizat prin trei aspecte:

a) aspectul static. Acesta se referă la faptul că în poziția deformată condiția de echilibru static este respectată atât de structura în ansamblu cât și de orice parte a sa.

Condiția de echilibru static se poate exprima utilizând:

- *ecuațiile de echilibru static* din Mecanica Teoretică. În aceste sens condițiile de echilibru static se exprimă prin două ecuații vectoriale:

$$\bar{\mathbf{R}} = 0 \quad \bar{\mathbf{M}} = 0 \quad (1.8)$$

căroră, pentru structurile plane le corespund trei ecuații scalare

$$\sum X_i = 0 \quad \sum Y_i = 0 \quad \sum M_{oz} = 0 \quad (1.9)$$

Deoarece deplasările secțiunilor transversale sunt mici, ecuațiile de echilibru static se pot scrie pe poziția inițială nedeformată a structurii. În capitolul 2 se vor studia în detaliu ecuațiile de echilibru static.

- *principiul lucrului mecanic virtual.* Acest principiu, care a fost aplicat în Mecanica Teoretică pentru exprimarea condiției de echilibru static a solidului rigid sau a sistemelor de solide rigide (mecanisme), poate fi utilizat și în cazul corpurilor sau sistemelor de corpuri deformabile.

În capitolul 5 se va studia în detaliu aplicarea principiului lucrului mecanic virtual în calculul structurilor static determinate.

b) aspectul geometric. Acesta se referă la faptul că în poziția deformată a structurii se respectă continuitatea materialului și legăturile exterioare și interioare. Altfel spus forma deformată este compatibilă cu legăturile.

c) aspectul fizic. Acesta se referă la relațiile constitutive ale materialului, respectiv legătura între eforturi unitare și deformații specifice.

Dintre cele trei aspecte, primele două reprezintă instrumente de lucru ale Staticii Construcțiilor, cel de-al treilea fiind specific Rezistenței Materialelor.

1.6. EFORTURI. RELAȚII ÎNTRE EFORTURI ȘI ÎNCĂRCĂRI LA GRINDA DREAPTĂ

Sub acțiunea încărcărilor exterioare, structurile de rezistență se deformează și în interiorul materialului vor apărea eforturi.

Eforturile dintr-o secțiune reprezintă efectul forțelor exterioare (inclusiv reacțiunile) de pe porțiunea îndepărtată asupra porțiunii considerate și se obțin prin reducerea acestora în raport cu centrul de greutate al secțiunii (fig. 1.15,a).

În cazul structurilor formate din bare drepte, la care forțele se află în planul lor, în secțiunea curentă i apar următoarele eforturi:

- *forța axială* N_i , având direcția axei barei,
- *forța tăietoare* T_i , având direcția normalei la axa barei,
- *momentul încovoietor* M_i , având direcția normalei planului în care se găsește structura.

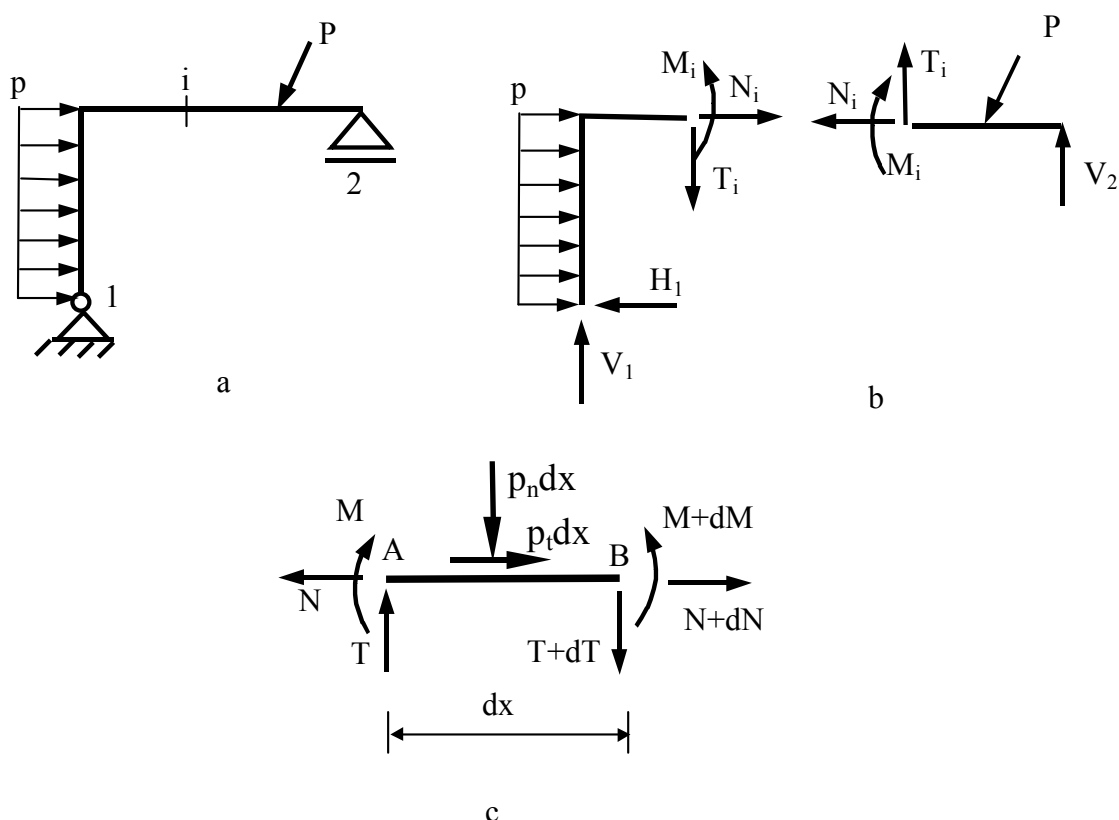


Fig. 1.15

În baza principiului acțiunii și reacțiunii, eforturile de pe fața din stânga a secțiunii sunt egale și de sens contrar cu cele de pe fața din dreapta secțiunii (fig. 1.15,b).

Cele trei eforturi din secțiunea curentă se definesc astfel:

- *forța axială* N_i reprezintă suma proiecțiilor pe axa barei a tuturor forțelor de la stânga secțiunii (sau a celor de la dreapta luate cu semn schimbat). Forța axială este pozitivă dacă are ca efect întinderea tronsonului de bară asupra careia acționează;

- *forța tăietoare* T_i reprezintă suma proiecțiilor pe normala la axa barei a tuturor forțelor de la stânga secțiunii (sau a celor de la dreapta luate cu semn schimbat). Forța tăietoare este pozitivă dacă tinde să rotească partea de structură asupra căreia acționează în sensul acelor de ceasornic;

- *momentul încovoietor* M_i reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de la stânga secțiunii în raport cu centrul de greutate al secțiunii considerate (sau a celor de la dreapta luate cu semn schimbat). Momentul încovoietor este pozitiv dacă are sensul acelor de ceasornic.

Modul în care variază eforturile, de la o secțiune la alta, se poate studia cu ajutorul relațiilor diferențiale dintre eforturi și încărcări. Aceste relații se stabilesc studiind echilibrul unui element de bară de lungime dx sub acțiunea încărcărilor exterioare (componenta tangențială a încărcării pe elementul dx este $p_t \cdot dx$, iar componenta normală este $p_n \cdot dx$) și a forțelor interne în secțiunea din stânga (N, T, M) și a celor în secțiunea din dreapta ($N+dN, T+dT, M+dM$) (fig. 1.15,c).

Ecuatiile de echilibru al elementului de bară sunt:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & N + dN - N + p_t \cdot dx &= 0 \\ \sum Y_i &= 0; & T + dT - T + p_n \cdot dx &= 0 \\ \sum M_B &= 0; & M + dM - M + T \cdot dx - p_n \cdot \frac{dx^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Neglijând infiniții de ordin superior se obține:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -p_t \\ \frac{dT}{dx} &= -p_n \\ \frac{dM}{dx} &= T \end{aligned} \quad (1.11)$$

Relațiile (1.11) se interpretează astfel:

- legea de variație a forței axiale este cu un grad mai mare decât legea de variație a componentei p_t a încărcării;

- legea de variație a forței tăietoare este cu un grad mai mare decât legea de variație a componentei p_n a încărcării;

- legea de variație a momentului încovoietor este cu un grad mai mare decât legea de variație a forței tăietoare și cu două grade mai mare decât legea de variație a componentei p_n a încărcării;

- pe tronsonul de bară pe care $p_t=0$, caz curent întâlnit în practică, forța axială este constantă;
 - pe tronsonul de bară pe care $p_n=0$, forța tăietoare este constantă, iar momentul încovoietor are variație liniară;
 - pe tronsonul de bară pe care p_n este constant, forța tăietoare are variație liniară, iar momentul încovoietor are variație parabolică;
 - în secțiunea în care forța tăietoare se anulează, momentul încovoietor capătă valoare de extrem (maxim sau minim);
 - în secțiunea în care este aplicată o forță concentrată, având direcția axei barei, în diagrama de forță axială se înregistrează un salt;
 - în secțiunea în care este aplicată o forță concentrată, având direcția normalei la axa barei, în diagrama de forță tăietoare se înregistrează un salt egal cu mărimea forței și în sensul de acțiune al acesteia, iar în diagrama de moment încovoietor se înregistrează o schimbare de pantă (vârf);
 - în secțiunea în care este aplicat un moment concentrat, în diagrama de moment încovoietor se înregistrează un salt în sensul de acțiune al acestuia.
- Diagramele de eforturi se trasează în raport cu o axă de referință, care este chiar axa barei. Valorile eforturilor se desenează pe normala la axa barei.
- Diagramele de forță axială și de forță tăietoare vor avea atașat semnul (+) sau (-) conform convenției de semne prezentate anterior, iar diagrama de moment încovoietor se va reprezenta de partea fibrei întinse, fiind legată de fenomenul real al deformării structurii.

1.7. DEFORMAREA STRUCTURILOR ELASTICE

Sub acțiunea încărcărilor structurile de rezistență se deformează, iar în interiorul materialului apar eforturi. Poziția deformată a unei structuri este caracterizată prin deplasări ale secțiunilor transversale. Aceste deplasări, denumite și deplasări punctuale, pot fi *translații* și *rotiri*. Deoarece materialul are o comportare elastică, aceste deplasări se mai numesc și **deplasări elastice**. Studiul deformării structurilor de rezistență constituie o problemă importantă în calculul structurilor deoarece la proiectarea unei structuri se verifică pe lângă condiția de rezistență și condiția de limitare a deformațiilor, pentru a permite o exploatare normală.

Cunoașterea calculului deplasărilor este importantă în cazul structurilor static nedeterminate unde pentru rezolvare este necesară utilizarea concomitentă a condiției de echilibru static și a celei de compatibilitate a deformatelor cu legăturile.

Pentru obținerea relațiilor de calcul al deplasărilor elastice este necesar să se introducă o serie de noțiuni noi și să se stabilească unele teoreme.

1.7.1 Noțiuni și teoreme generale

1.7.1.1. Lucrul mecanic al forțelor exterioare

În timpul acțiunii lor asupra structurii, forțele exterioare produc lucru mecanic, ca urmare a faptului că prin deformarea structurii, punctele de aplicație ale forțelor își schimbă poziția.

Există două situații în care forțele exterioare produc lucru mecanic:

a) *forța parcurge deplasarea produsă de ea însăși prin deformarea structurii asupra căreia acționează* (fig. 1.16,a)

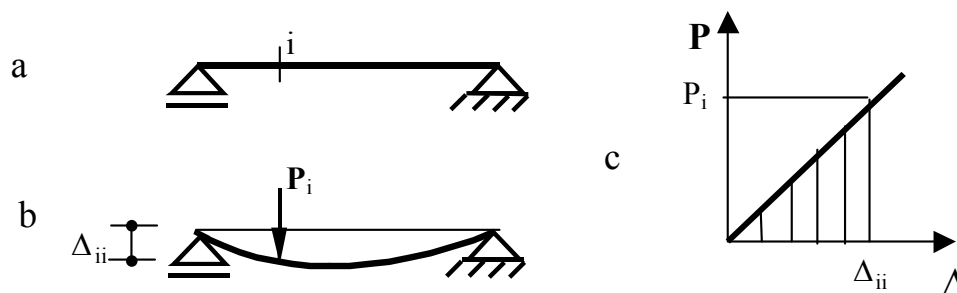


Fig. 1.16

În această situație, atât intensitatea forței P_i cât și deplasarea punctului său de aplicație Δ_{ii} cresc concomitent de la valoarea zero la valoarea finală (fig. 1.16,b), astfel că lucrul mecanic efectuat de forța P_i este

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} \quad (1.12)$$

și reprezintă aria triunghiului hașurat din figura 1.16,c

b) *forța parcurge deplasarea pe direcția sa produsă de o altă forță care acționează asupra structurii* (fig. 1.17).

În această situație, grinda este încărcată cu forța P_i , care a produs forma deformată I (fig. 1.17,b). În această poziție se aplică o nouă forță P_j , astfel că grinda se deformează în continuare, iar punctul de aplicație al forței P_i se deplasează cu Δ_{ij} (poziția II). Deci forța P_i va parcurge cu întreaga intensitate deplasarea Δ_{ij} , astfel că lucrul mecanic va fi

$$L_{\text{ext}} = P_i \Delta_{ij} \quad (1.13)$$

și este reprezentat de aria dreptunghiului hașurat din figura 1.17,c.

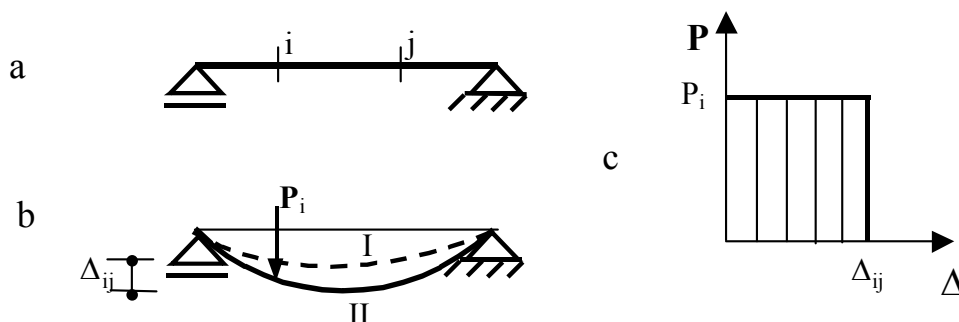


Fig. 1.17

Obesrvație

- primul indice care însoțește deplasarea Δ reprezintă direcția pe care are loc deplasarea, iar al doilea indice reprezintă cauza care a produs deplasarea,
- dacă asupra structurii sunt aplicate simultan mai multe forțe atunci expresia (1.12) a lucrului mecanic al forțelor exterioare capătă forma

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \sum P_i \cdot \Delta_{ii} \quad (1.14)$$

- dacă pe structură există sistemul de forțe $\mathbf{P}_i$ și ulterior se aplică sistemul de forțe $\mathbf{P}_j$, atunci expresia (1.13) a lucrului mecanic al forțelor exterioare $\mathbf{P}_i$ capătă forma

$$L_{\text{ext}} = \sum P_i \cdot \Delta_{ij} \quad (i,j=1,2,\dots,n) \quad (1.15)$$

1.7.1.2. Lucrul mecanic al forțelor interioare. Lucrul mecanic al eforturilor

În urma aplicării încărcărilor, în structură ia naștere o stare de solicitare caracterizată prin variația forțelor de legătură dintre particulele materiale și a deformațiilor în toate secțiunile structurii. Forțele interioare parcurgând deformațiile corespunzătoare produc lucru mecanic interior, care este negativ deoarece forțele de legătură se opun deformării structurii.

Lucru mecanic dat de eforturi este egal cu lucru mecanic al forțelor interioare dar cu semn contrar, $L_{\text{ef}} = -L_{\text{int}}$ deoarece deformarea se produce în sensul de acțiune al eforturilor.

Pentru determinarea lucrului mecanic al eforturilor N , T și M se consideră un element de lungime dx având secțiunea transversală constantă, iar caracteristicile fizico-mecanice ale materialului sunt E și G (fig. 1.18).

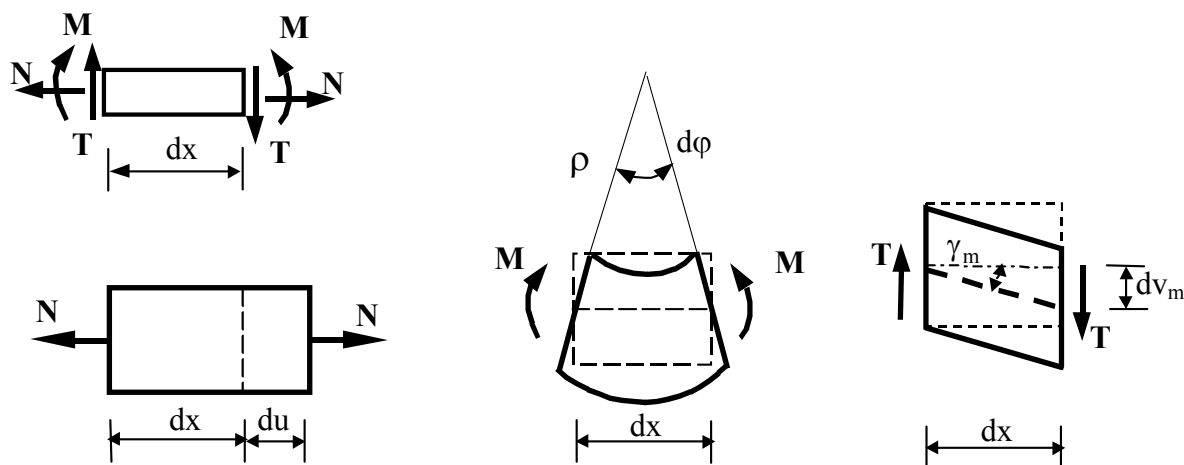


Fig. 1.18

în continuare se prezintă expresiile lucrului mecanic al eforturilor pentru fiecare solicitare în parte. La fel ca și în cazul lucrului mecanic exterior, lucrul mecanic al eforturilor poate fi determinat corespunzător celor două situații:

a) cazul în care eforturile cresc odată cu deformațiile pe direcțiile lor;

Solicitarea axială. Elementul de bară solicitat numai de forțele axiale N se deformează alungindu-se cu $du = \varepsilon \cdot dx$. Lucrul mecanic al eforturilor axiale N este

$$L_N = \frac{1}{2} \int N \cdot du \quad (1.16)$$

Deoarece $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$, lucrul mecanic al eforturilor axiale devine

$$L_N = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx \quad (1.17)$$

Încovoierea. Sub acțiunea momentelor încovoietoare M elementul de bară se încovoie, iar secțiunile de capăt se rotesc cu unghiul $d\varphi = \frac{1}{\rho} \cdot dx$. Lucrul mecanic produs de momentele încovoietoare este

$$L_M = \frac{1}{2} \int M \cdot d\varphi \quad (1.18)$$

Deoarece $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, lucrul mecanic produs de momentele încovoietoare devine

$$L_M = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} \cdot dx \quad (1.19)$$

Lunecarea. Forțele tăietoare au ca efect lunecarea relativă a secțiunilor extreme ale elementului, astfel încât deplasarea pe direcția forței tăietoare este $dv_m = \gamma_m \cdot dx$. Lucrul mecanic produs de forțele tăietoare este

$$L_T = \frac{1}{2} \int T \cdot dv_m \quad (1.20)$$

Deoarece $\gamma_m = \frac{\alpha T}{GA}$ rezultă

$$L_T = \frac{1}{2} \int \frac{\alpha T^2}{GA} dx \quad (1.21)$$

unde α reprezintă un coeficient de formă al secțiunii transversale a barei.

Pentru cazul general al solicitărilor compuse, lucrul mecanic al eforturilor are expresia

$$L_{ef} = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\alpha T^2}{GA} dx \quad (1.22)$$

b) cazul în care eforturile parcurg deformațiile pe direcțiile lor, deformații produse de o altă cauză.

În cazul în care eforturile sunt produse de o cauză i , adică N_i , T_i și M_i , iar deformațiile sunt produse de o altă cauză j , adică du_j , $d\phi_j$ și $(dv_m)_j$, expresia lucrului mecanic al eforturilor este:

$$L_{ef} = \int N_i du_j + \int M_i d\phi_j + \int T_i d(v_m)_j \quad (1.23)$$

sau dezvoltat

$$L_{ef} = \int \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{\alpha T_i T_j}{GA} dx \quad (1.24)$$

De remarcat faptul că integralele se extind asupra întregii bare sau structuri.

În studiul structurilor elastice se utilizează și noțiunea de **energie de deformație** sau energie potențială, notată cu W și care este definită de relația

$$W = L_{ef} \quad (1.25)$$

Energia de deformație reprezintă energia acumulată de structură în timpul deformării. La îndepărtarea încărcărilor exterioare, energia de deformație se manifestă prin aducerea structurii în poziția pe care aceasta a avut-o în momentul încărcării cu forțe.

1.7.1.3. Lucrul mecanic total

Rezultatele obținute anterior permit să se evalueze lucrul mecanic total produs în cursul deformării structurii, atât de forțele exterioare cât și de eforturi

$$L_{TOT} = L_{ext} + L_{int} = L_{ext} - L_{ef} = L_{ext} - W \quad (1.26)$$

În cazul în care forțele și eforturile din situația de încărcare i parcurg deplasările și deformațiile produse de ele înșile, lucrul mecanic total capătă forma:

$$L_{TOT} = \frac{1}{2} \sum P_i \cdot \Delta_{ii} - \frac{1}{2} \int \frac{N_i^2}{EA} dx - \frac{1}{2} \int \frac{M_i^2}{EI} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\alpha T_i^2}{GA} dx \quad (1.27)$$

unde Δ_{ii} reprezintă deplasarea pe direcția forței curente i .

În cazul în care forțele și eforturile din situația de încărcare i parcurg deplasările și deformațiile produse de situația de încărcare j , lucrul mecanic total capătă forma:

$$L_{TOT} = \sum P_i \cdot \Delta_{ij} - \int \frac{N_i N_j}{EA} dx - \int \frac{M_i M_j}{EI} dx - \int \frac{\alpha T_i T_j}{GA} dx \quad (1.28)$$

1.7.1.4 Teorema lui Clapeyron

Conform ipotezelor simplificatoare ale calculului liniar elastic, structurile de rezistență sunt sisteme conservative. De asemenea s-a admis că încărcările sunt aplicate static, respectiv că energia cinetică a structurii în timpul deformării este egală cu zero ($E_c=0$). În această situație, teorema variației energiei cinetice, care exprimă egalitatea dintre variația energiei cinetice într-un interval de timp cu lucrul mecanic elementar produs ($dE = dL$) devine

$$dL = L_{12} = L_{TOT} = 0 \quad (1.29)$$

Ținând cont de (1.26), relația (1.29) devine

$$L_{TOT} = L_{ext} - L_{int} = 0 \quad (1.30)$$

Relația (1.30) exprimă faptul că la structurile elastice aflate în echilibru, lucrul mecanic total este egal cu zero.

Această relație poate fi pusă și sub următoarele forme

$$L_{ext} = L_{ef} \quad (1.31)$$

sau

$$L_{ext} = W \quad (1.32)$$

Relația (1.32) reprezintă **teorema lui Clapeyron**, care se enunță astfel: **"Pentru un corp deformabil, în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe, lucrul mecanic al forțelor exterioare este egal cu energia de deformare acumulată de corp"**. Relația (1.32) are o mare importanță în calculul static al structurilor elastice.

1.7.2. Calculul deplasărilor elastice

1.7.2.1 Relația Maxwell-Mohr

Dacă structura este încărcată cu două sisteme de forțe P_i și P_j atunci relația (1.32) apare sub forma

$$L_{ij} = W_{ij} \quad (1.33)$$

sau ținând seama de (1.23) se obține forma dezvoltată

$$\sum P_i \cdot \Delta_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{\alpha T_i T_j}{GA} dx \quad (1.34)$$

Relația (1.34) poate fi folosită în calculul deplasărilor pe o anumită direcție, dacă se face următoarea particularizare:

- se presupune că sistemul de forțe i este format dintr-o singură forță $P_i=1$ acționând pe direcția deplasării căutate. Sub acțiunea acestei forțe în structură apar eforturile n_i , m_i și t_i (s-au notat eforturile cu literă mică pentru a marca faptul că sunt produse de o forță egală cu unitatea),

- forțele P_j sunt tocmai forțele reale.

În această situație, relația (1.34) devine:

$$1 \cdot \Delta_{ij} = \int \frac{n_i N_j}{EA} dx + \int \frac{m_i M_j}{EI} dx + \int \frac{\alpha t_i T_j}{GA} dx \quad (1.35)$$

și reprezintă *relația Maxwell-Mohr* pentru calculul deplasărilor structurilor.

1.7.2.2. Calculul practic al deplasărilor elastice

Deplasările unei secțiuni, dintr-o bară a structurii, sunt două translații și o rotație. În cazul în care este necesar să se calculeze translația unei secțiuni pe o direcție dată atunci în secțiunea considerată și pe direcția dată se introduce o forță egală cu unitatea (fig. 1.19,a). Dacă trebuie calculată rotirea absolută a unei secțiuni atunci încărcarea unitară este reprezentată de un moment unitar (fig. 1.19,b). Când este necesar să se determine rotirea relativă a două secțiuni se introduce o pereche de momente fiecare egale cu unitatea (fig. 1.19,c).

Etapele de lucru pentru calculul unei deplasări elastice sunt:

- se încarcă structura cu forțele exterioare și se trasează diagramele de eforturi N , T și M ;

- se încarcă structura cu încărcarea unitate acționând pe direcția i și se trasează diagramele n_i , t_i și m_i ;

- se efectuează integralele din formula Maxwell-Mohr.

Deoarece forțele sistemului j sunt tocmai forțele exterioare se poate renunța la indicele j din (1.31) astfel încât se obține forma:

$$\Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx + \int \frac{m_i M}{EI} dx + \int \frac{\alpha t_i T}{GA} dx \quad (1.36)$$

unde integralele se extind asupra tuturor barelor structurii.

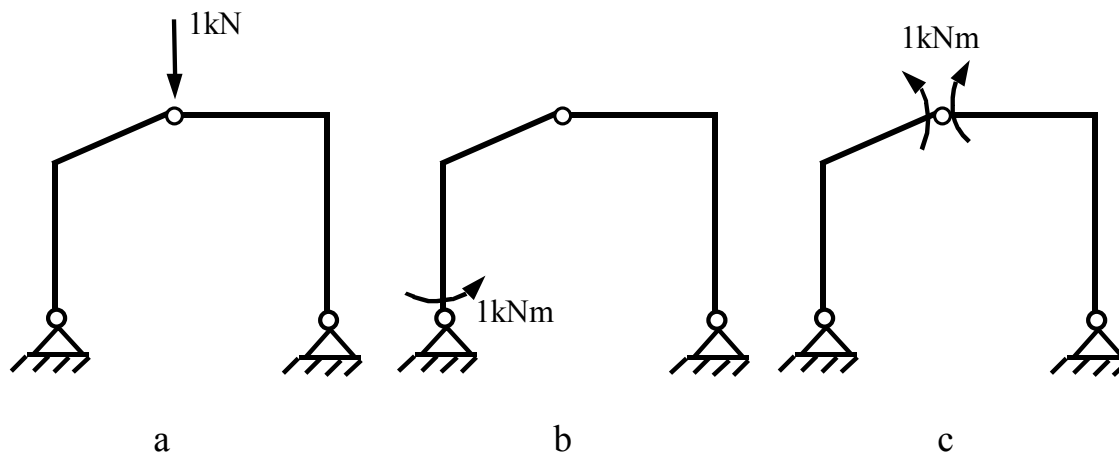


Fig. 1.19

În ceea ce privește semnul integralelor din (1.36) sunt posibile următoarele situații:

- integrala de tipul $\int \frac{n_i N}{EA} dx$. Dacă ambele eforturi n_i și N sunt de aceeași natură - întindere sau compresiune - semnul integralei este plus, dacă unul este de întindere iar celălalt este de compresiune semnul este minus;
- integrala de tipul $\int \frac{\alpha t_i T}{GA} dx$. Se respectă aceeași regulă ca mai sus.
- integrala de tipul $\int \frac{m_i M}{EI} dx$. Dacă ambele momente încovoietoare, m_i și M , produc întinderea aceleiași fibre a barei semnul este pozitiv, dacă ele întind fibre diferite atunci semnul este negativ.

După efectuarea calculelor se poate obține pentru deplasarea Δ_i semnul plus sau minus. Semnul plus înseamnă că deplasarea reală se produce în sensul în care acționează încărcarea unitate, iar semnul minus înseamnă că deplasarea reală se produce în sens invers sensului de acțiune al încărcării unitate.

Termenii care intervin în (1.36) au pondere diferită în calculul deplasărilor elastice la diferite tipuri de structuri. Astfel:

- la structuri în formă de grinzi drepte sau cadre, la care efectul predominant este încovoierea, deplasarea se calculează cu relația

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M}{EI} dx \quad (1.37)$$

- la grinzile cu zăbrele, în barele cărora apar numai eforturi axiale, deplasarea se calculează cu relația

$$\Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx \quad (1.38)$$

- la arce, unde efectul predominant este compresiunea excentrică (încovoiere cu forță axială), deplasarea se calculează cu relația

$$\Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx + \int \frac{m_i M}{EI} dx \quad (1.39)$$

1.7.2.3. Regula lui Vereșciaghin

Calculul deplasărilor elastice prin efectuarea directă a integralelor din expresia (1.32) este greoi. Pentru elementele și structurile de rezistență formate din bare drepte, având aria și momentul de inerție al secțiunii transversale constante, s-a putut da o regulă practică de integrare numită regula lui Vereșciaghin.

La stabilirea acestei reguli s-a pornit de la constatarea că diagramele de moment obținute din încărcarea cu forța $P_i=1$ au întotdeauna variație liniară în lungul barelor, în timp ce diagramele de moment încovoiator M , produse de forțele exterioare pot avea atât variații liniare cât și curbilinii.

Fie un tronson dintr-o bară având modulul de elasticitate E și momentul de inerție I pe care diagrama de moment încovoiator M are o variație oarecare, iar diagrama unitară m_i are o variație liniară (fig.1.20). Se urmărește efectuarea următoarei integrale:

$$\int \frac{m_i M}{EI} dx \quad (1.40)$$

Pentru aceasta se notează suprafața elementară din diagrama M cu $d\Omega = M \cdot dx$, iar ordonata corespunzătoare din diagrama m_i cu $m_x = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

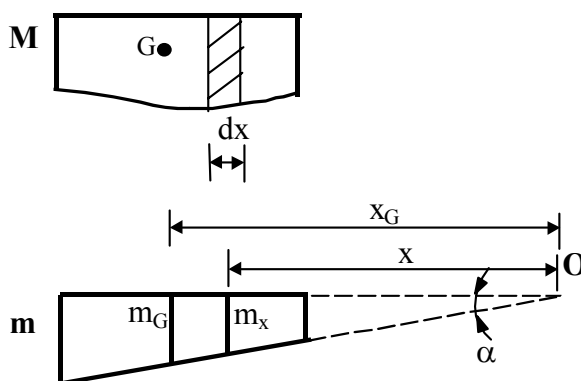


Fig. 1.20

Cu aceste elemente se obține

$$\int \frac{m_i M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_{\Omega} x \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot d\Omega = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{EI} \int_{\Omega} x \cdot d\Omega \quad (1.42)$$

Deoarece $\int_{\Omega} x \cdot d\Omega$ reprezintă momentul static al suprafeței diagramei M în raport cu o axă ce trece prin punctul O rezultă

$$\int_{\Omega} x \cdot d\Omega = x_g \cdot \Omega \quad (1.42)$$

Observând că $x_g \cdot \operatorname{tg}\alpha = m_g$, se obține expresia căutată

$$\int \frac{m_i M}{EI} dx = \frac{\Omega \cdot m_g}{EI} \quad (1.43)$$

care se interpretează astfel: **"rezultatul integrării a două diagrame, dintre care cel puțin una cu variație liniară, este egal cu produsul dintre suprafața diagramei cu variație neliniară și ordonata corespunzătoare centrului său de greutate, luată din diagrama cu variație liniară, împărțit la produsul EI ".**

Dacă ambele diagrame au variație liniară, atunci se poate lua suprafața oricăreia și ordonata din cealaltă.

În continuare se prezintă câteva exemple de efectuare a integrării diagramei de moment prin regula lui Vereșciaghin.

- integrarea diagramei parabolice cu diagrama triunghiulară din figura 1.21,a.

Se determină suprafața parabolei $\Omega_1 = \frac{2}{3}al$ și ordonata din triunghi $m_{gII} = \frac{1}{2}c$, iar rezultatul integrării este:

$$(M_I, m_{II}) = \frac{1}{EI} \Omega_1 \cdot m_{gII} = \frac{1}{EI} \frac{2}{3}al \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{3EI}acl$$

-în cazul din figura 1.21,b diagrama liniară se descompune în două triunghiuri (sau un dreptunghi și un triunghi), rezultatul integrării fiind:

$$(M_I, m_{II}) = \frac{1}{EI} \Omega_1 \cdot m_{gII} = \frac{1}{EI} \frac{2}{3}al \left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b \right) = \frac{1}{6EI}al(c+b)$$

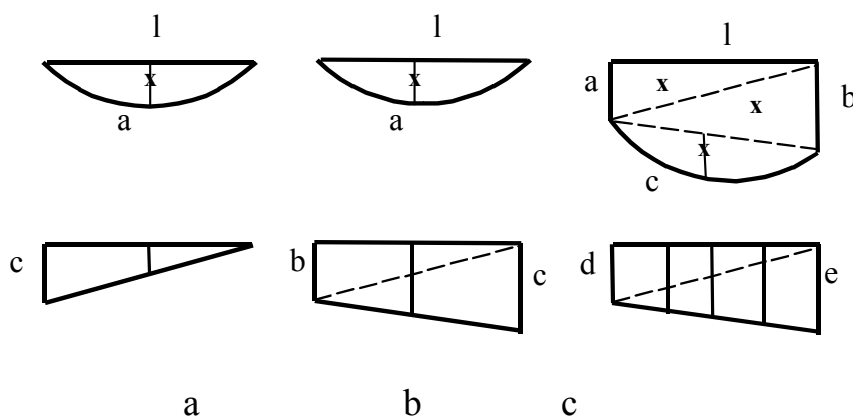


Fig. 1.21

- dacă ambele diagrame sunt compuse, ele se descompun în suprafețe simple. În situația din figura 1.21,c se obține:

$$(M_I, m_{II}) = \frac{1}{EI} \Omega_I \cdot m_{gII} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} al \left(\frac{2}{3} d + \frac{1}{3} e \right) + \frac{1}{2} bl \left(\frac{1}{3} d + \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} cl \left(\frac{1}{2} d + \frac{1}{2} e \right) \right]$$

- sunt cazuri în care o diagramă, sau ambele, taie linia de referință. {i în acest caz se descompune diagrama reală în suprafețe elementare. Pentru diagramele din figura 1.22 s-a prezentat descompunerea în suprafețe elementare, iar rezultatul integrării este:

$$(M_I, m_{II}) = \frac{1}{EI} \Omega_I \cdot m_{gII} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} bl \left(\frac{2}{3} d - \frac{1}{3} c \right) - \frac{2}{3} al \left(\frac{1}{2} d - \frac{1}{2} c \right) \right]$$

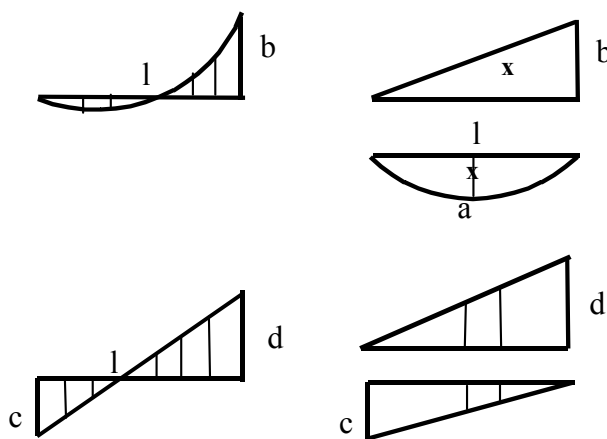


Fig. 1.22

1.7.3. Calculul deplasărilor elastice produse de variația de temperatură la structuri static determinate

La proiectarea unor structuri se ține seama și de efectul variațiilor de temperatură. Acestea apar datorită diferențelor de temperatură ce există între temperatura la care se execută construcția și temperatura maximă și minimă din zona unde urmează să se amplaseze construcția.

La structurile static determinate, variația de temperatură produce numai modificarea configurației geometrice a structurii, fără să introducă eforturi în structură. Aceasta are drept cauză faptul că structurile static determinate au un număr minim de legături care să-i asigure fixarea de teren și invariabilitatea geometrică.

Pentru a stabili expresia deplasărilor produse de variația de temperatură se consideră un element de bară de lungime dx supus temperaturilor t_1 la fața superioară și t_2 la fața inferioară ($t_2 > t_1$), iar pe înălțimea secțiunii transversale a barei (h) temperatura variază liniar (fig. 1.23).

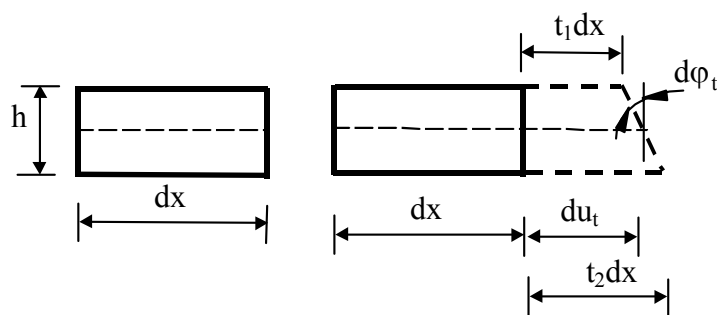


Fig. 1.23

Datorită acțiunii variației de temperatură, are loc o alungire a elementului dx cu $du_t = \alpha \cdot t_m \cdot dx$ ($t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$) și o rotire relativă a celor două fețe ale elementului cu unghiul $d\varphi_t = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot dx}{h}$ ($\Delta t = t_2 - t_1$).

Se știe că pentru calculul unei deplasări elastice se încarcă structura cu o forță $P_i=1$ pe direcția deplasării căutate rezultând în structură eforturile n_i , t_i și m_i . Sub acțiunea variației de temperatură, eforturile respective parcurg deplasările produse de variația de temperatură, astfel că, utilizând teorema lui Clapeyron se obține

$$\Delta_{it} = \int n_i du_t + \int m_i d\varphi_t = \alpha \int n_i t_m dx + \alpha \int m_i \frac{\Delta t}{h} dx \quad (1.44)$$

unde α reprezintă coeficientul de dilatare termică ($1 \div 1,1 \times 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$)

Deoarece t_m , Δt și h sunt constante pe fiecare bară, rezultă că $\int n_i dx$ și $\int m_i dx$ reprezintă suprafața diagramei de forță axială respectiv de moment încovoietor pe bara respectivă.

Semnul temenilor ce intervin în calculul deplasărilor se stabilește astfel:

- dacă forța axială și temperatura medie t_m au același efect asupra barei, ambele de alungire sau scurtare, semnul este plus, în caz contrar semnul este minus;
- dacă momentul încovoietor întinde fibra mai caldă semnul este plus, iar dacă întinde fibra mai rece semnul este minus.

1.7.4. Deplasarea produsă de cedări de reazeme la structuri static determinate

Prin cedări de reazeme se înțeleg tasările și/sau rotirile fundațiilor, ca urmare a deformării terenului de fundație și inexactitățile de execuție a elementelor prefabricate care trebuie conectate la montaj.

La structurile static determinate, cedările de reazeme nu produc decât modificarea configurației geometrice a structurii fără să introducă eforturi.

Expresia deplasării produse de cedările de reazeme la structurile static determinate se determină utilizând teorema lui Clapeyron. Astfel sub acțiunea forței unitare aplicată pe direcția deplasării ce urmează a fi calculată, în legăturile exterioare apar reacțiunile r_{ki} , care datorită unei cedări de reazem, produc lucrul mecanic exterior $\sum r_{ki} \Delta_k$.

Deoarece cedările de reazeme nu produc eforturi în structura static determinată, respectiv $L_{ef}=0$, atunci conform teoremei lui Clapeyron se obține

$$L_{ext} = 0 \quad (1.45)$$

sau

$$1 \cdot \Delta_i + \sum r_{ki} \Delta_k = 0 \quad (1.46)$$

Din relația (1.46) se obține expresia deplasării produse de cedările de reazeme la structurile static determinate

$$\Delta_i = -\sum r_{ki} \Delta_k \quad (1.47)$$

CAPITOLUL II

STRUCTURI STATIC DETERMINATE ALCĂTUIITE DIN BARE DREPTE

Structurile static determinate se caracterizează prin faptul că au un număr minim de legături necesare asigurării invariabilității geometrice și fixării în plan.

Pentru determinarea eforturilor este necesară numai condiția de echilibru static, iar pentru determinarea deplasărilor se utilizează atât condiția de echilibru static cât și condiția de compatibilitate a deformatei cu legăturile.

Pentru rezolvarea unei structuri static determinate trebuie parcurse următoarele etape:

a) calculul reacțiunilor. Reacțiunile se determină cu ajutorul ecuațiilor de echilibru static utilizând metodele Mecanicii Teoretice – metoda echilibrului părților și metoda solidificării.

Dacă structurile sunt formate dintr-un singur corp (fig. 2.1,a) atunci determinarea reacțiunilor se face direct prin aplicarea a 3 ecuații de echilibru static, în una din următoarele variante:

- două ecuații de proiecție în raport cu două axe perpendiculare și o ecuație de moment în raport cu un punct oarecare din plan,

- două ecuații de momente în raport cu două puncte oarecare din plan și o ecuație de proiecție în raport cu o axă care să nu fie perpendiculară pe dreapta ce unește cele două puncte considerate pentru scrierea ecuațiilor de momente,

- trei ecuații de momente scrise în raport cu trei puncte necoliniare din plan.

Dacă structura este formată din două sau mai multe corpuri, pentru calculul reacțiunilor se apelează la una dintre cele două metode amintite anterior.

Astfel folosirea metodei echilibrului părților implică scrierea ecuațiilor de echilibru pentru fiecare dintre corpurile ce alcătuiesc structura. În acest caz apare necesitatea punerii în evidență și a forțelor de legătură interioare și a calculului lor. Acestea sunt perechi de forțe egale și de sens contrar, conform principiului acțiunii și reacțiunii. Pentru structura din figura 2.1,c, folosind metoda echilibrului părților (fig. 2.1,d), se obține un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute, deși reacțiunile sunt numai 4 (V_1, H_1, V_3, H_3).

O rezolvare mai rapidă se realizează folosind concomitent atât metoda solidificării cât și metoda echilibrului părților. Astfel scriind 3 ecuații de echilibru pentru ansamblul structurii și o ecuație de echilibru a uneia dintre părți (o ecuație de momente în raport cu articulația interioară, pentru forțele de la stînga sau de la dreapta) se pot obține valorile celor 4 reacțiuni.

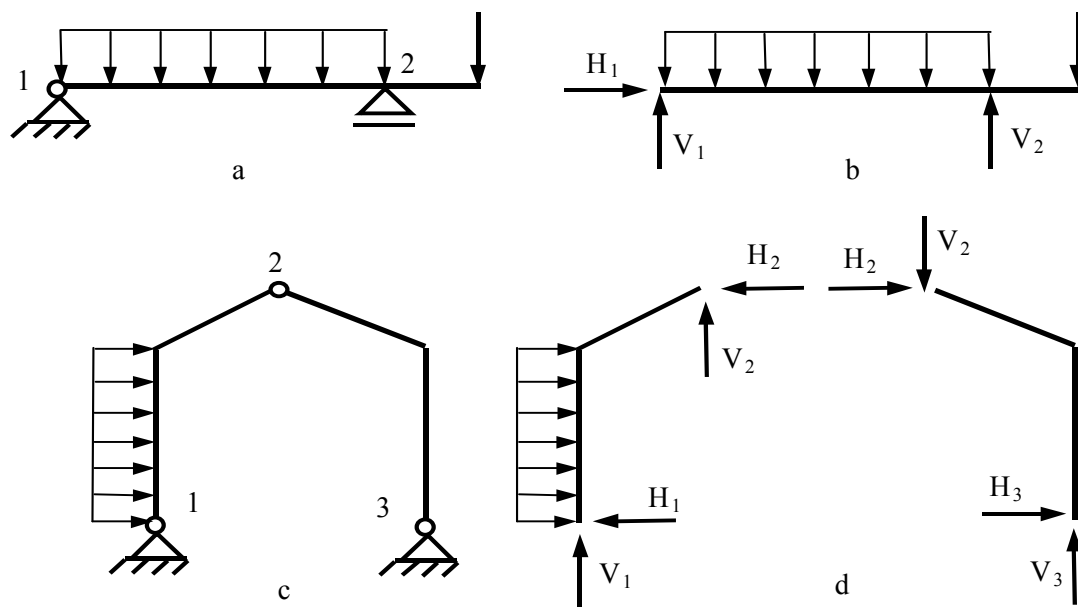


Fig. 2.1

b) trasarea diagramelor de eforturi. Trasarea diagramelor de eforturi se va realiza ținând cont de relațiile diferențiale între eforturi și încărcări la grinda dreaptă, prezentate în paragraful 1.6. precum și de interpretarea lor.

Diagramele de eforturi se trasează în raport cu o axă de referință, care este chiar axa barei. Valorile eforturilor se desenează pe normala la axa barei. Diagramele de forță axială și de forță tăietoare vor avea atașat semnul (+) sau (-) conform convenției de semne prezentate în paragraful 1.6, iar diagrama de moment încovoietor se va reprezenta de partea fibrei întinse, fiind legată de fenomenul real al deformării structurii.

c) calculul deplasărilor elastice. Pentru calculul deplasărilor elastice se va ține cont de etapele prezentate în paragraful 1.7. Calculul practic se va realiza utilizând regula lui Vereșciaghin.

2.1. GRINDA DREAPTĂ

2.1.1. Grinda în consolă

Exemplul 2.1. Se consideră grinda în consolă din figura. 2.2. Să se calculeze reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi și să se calculeze deplasarea pe verticală a capătului liber al consolei.

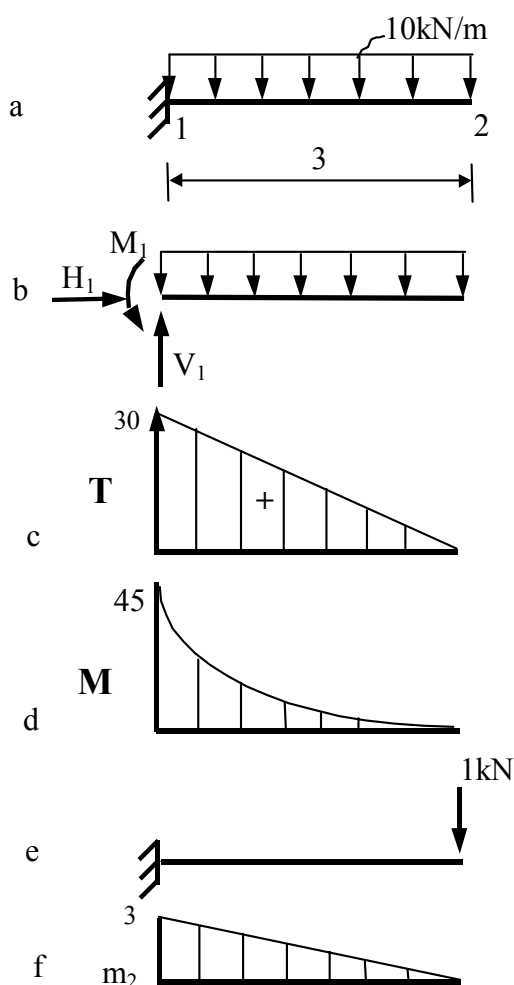


Fig. 2.2

Calculul reacțiunilor. Introducând echivalentul mecanic al încastrării plane din punctul 1, ecuațiile de echilibru ale consolei sunt:

$$\sum X_i = 0 \quad H_1 = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad V_1 - 10 \cdot 3 = 0 \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad -M_1 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \quad M_1 = 45 \text{ kNm}$$

Diagrama de forță tăietoare

Forța tăietoare în punctul 1 este $T_1 = V_1 = 30 \text{ kN}$. Ea este pozitivă deoarece tinde să rotească grinda în sensul acelor de ceasornic. Pe intervalul 1-2 forța tăietoare are o variație liniară, într-o secțiune curentă avînd expresia

$$T_x = V_1 - 10x$$

În punctul 2 forța tăietoare este $T_2 = V_1 - 10 \cdot 3 = 0$

Diagrama de moment încovoietor

Momentul încovoietor în punctul 1 este $M_1 = 45 \text{ kNm}$ și întinde fibra superioară.

Pe intervalul 1-2 momentul încovoietor are o variație parabolică, într-o secțiune curentă, avînd expresia

$$M_x = -M_1 + V_1 \cdot x - 10 \cdot \frac{x^2}{2}$$

În punctul 2 momentul încovoietor este $M_2 = -45 + 30 \cdot 3 - 10 \cdot \frac{3^2}{2} = 0$

Convexitatea diagramei de moment încovoietor este dată de sensul încărcării (de sus în jos).

Calculul deplasării v_2 Pentru calculul deplasării pe verticală a capătului liber al consolei produsă de încărcarea exterioară se utilizează relația Maxwell-Mohr. În acest sens este necesară trasarea diagramei de moment încovoietor produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în secțiunea respectivă (fig. 2.2,e).

Calculul practic al deplasării se poate face atît prin integrare directă cît și prin regula lui Vereșcighin:

- prin integrare direct

$$v_2 = \int \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^3 (-45 + 30x - 10 \frac{x^2}{2}) \cdot (-3 + x) dx =$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^3 (-5x^3 + 45x^2 - 135x + 135) dx = \left(-\frac{5x^4}{4} + 15x^3 - \frac{135}{2}x^2 + 135x \right) \Big|_0^3 = \frac{101,25}{EI} (\text{m})$$

- prin regula lui Vereşciaghin

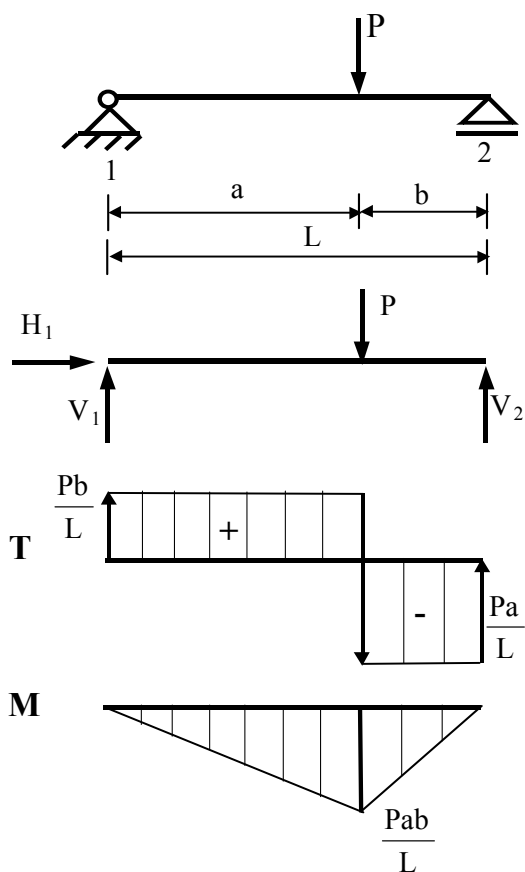
Diagrama M de momente încovoietoare poate fi descompusă în suprafețe simple, triunghi și parabolă, astfel că deplasarea v_2 capătă forma

$$v_2 = \int \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{10 \cdot 3^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \frac{101,25}{EI} \text{ (m)}$$

Se observă că s-a obținut același rezultat, dar că volumul de calcul prin integrare directă este mai mare. Deoarece rezultatul este pozitiv, înseamnă că deplasarea capătului liber al consolei se produce în sensul forței unitare considerate, respectiv în jos.

2.1.2. Grinda simplu rezemată

Exemplul 2.2. Fie grinda simplu rezemată din figura 2.3. Să se traseze diagramele de eforturi și să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii în care este aplicată forța (secțiunea i) precum și rotirea secțiunii 1.



Calculul reacțiunilor. Introducând

echivalentul mecanic al articulației din punctul 1 și al reazemului simplu din punctul 2, ecuațiile de echilibru ale grinzii sunt

$$\sum X_i = 0 \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \quad P \cdot a - V_2 \cdot L = 0 \quad V_2 = \frac{Pa}{L}$$

$$\sum M_2 = 0 \quad V_1 \cdot L - P \cdot b = 0 \quad V_1 = \frac{Pb}{L}$$

Se observă că pentru calculul reacțiunilor verticale s-au utilizat două ecuații de momente. Valorile reacțiunilor verticale pot fi verificate scriind o ecuație de proiecție pe verticală, respectiv

$$\sum Y_i = 0 \quad V_1 - P + V_2 = \frac{Pb}{L} - P + \frac{Pa}{L} = 0$$

Diagrama de forță tăietoare. Forța

tăietoare în punctul 1 este $T_1 = V_1 = \frac{Pb}{L}$ și este pozitivă. Pînă în secțiunea în care este aplicată forța concentrată P, forța tăietoare este constantă. În secțiunea 2, diagrama de forță tăietoare se încheie cu valoarea reacțiunii V_2 .

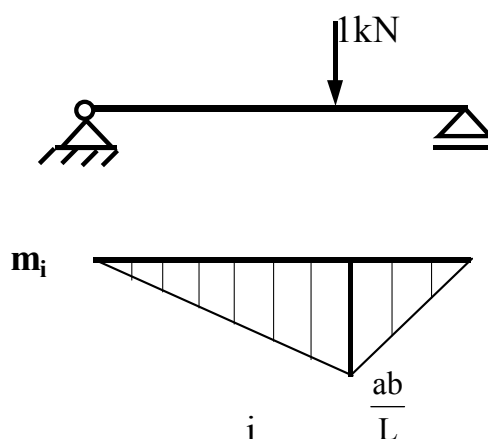
În dreptul forței concentrate are loc un salt egal cu valoarea P, astfel că forța tăietoare scade de la $\frac{Pb}{L}$ la $-\frac{Pa}{L}$. Mai departe, pînă în secțiunea 2, forța tăietoare rămîne constantă și negativă. În secțiunea 2, diagrama de forță tăietoare se încheie cu valoarea reacțiunii V_2 .

Diagrama de moment încovoietor.

În secțiunile de la capete momentul încovoietor este egal cu zero, iar pe intervalele cuprinse între extremități și secțiunea în care este aplicată forța concentrată P variația este liniară. Valoarea momentului încovoietor în această secțiune este $\frac{Pab}{L}$ și este maximă. Se observă că în dreptul forței concentrate, există un vîrf, adică are loc o schimbare de pantă ca urmare a schimbării valorii forței tăietoare (a se vedea interpretarea relației $\frac{dM}{dx} = T$ din paragraful 1.7). Fibra întinsă este fibra inferioară.

Calculul deplasării v_i . Se încarcă grinda cu o forță verticală egală cu unitatea acționînd în secțiunea respectivă și se trasează diagrama m_i (fig. 2.4). Utilizînd regula lui Verschiagin se obține

$$v_i = \int \frac{Mm_i}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Pab}{L} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{L} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{Pab}{L} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{L} \right) = \frac{Pa^2b^2}{3EIL} \text{ (m)}$$



Calculul rotirii θ_1 . Se încarcă grinda

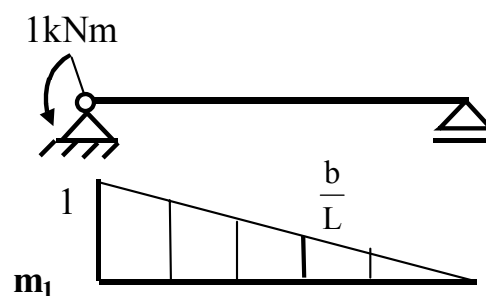
Fig. 2.4

cu un moment concentrat egal cu unitatea acționînd în secțiunea 1 și se trasează diagrama m_1 (fig. 2.5). Utilizînd regula lui Verschiagin se obține

$$\theta_1 = \int \frac{Mm_1}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Pab}{L} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{L} \right) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{Pab}{L} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{L} \right) = -\frac{Pab(a^2 + 3ab + 2b^2)}{6EIL^2} \text{ (rad)}$$

Deci rotirea se produce în sens orar.

Fig. 2.5



Exemplul 2.3 Se consideră grindă simplă rezemată din figura 2.6. Să se traseze diagramele de eforturi (T și M) și să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii de la mijlocului deschiderii grinzii și rotirea secțiunii 2.

Calculul reacțiunilor. Ecuațiile de echilibru ale grinzii sunt

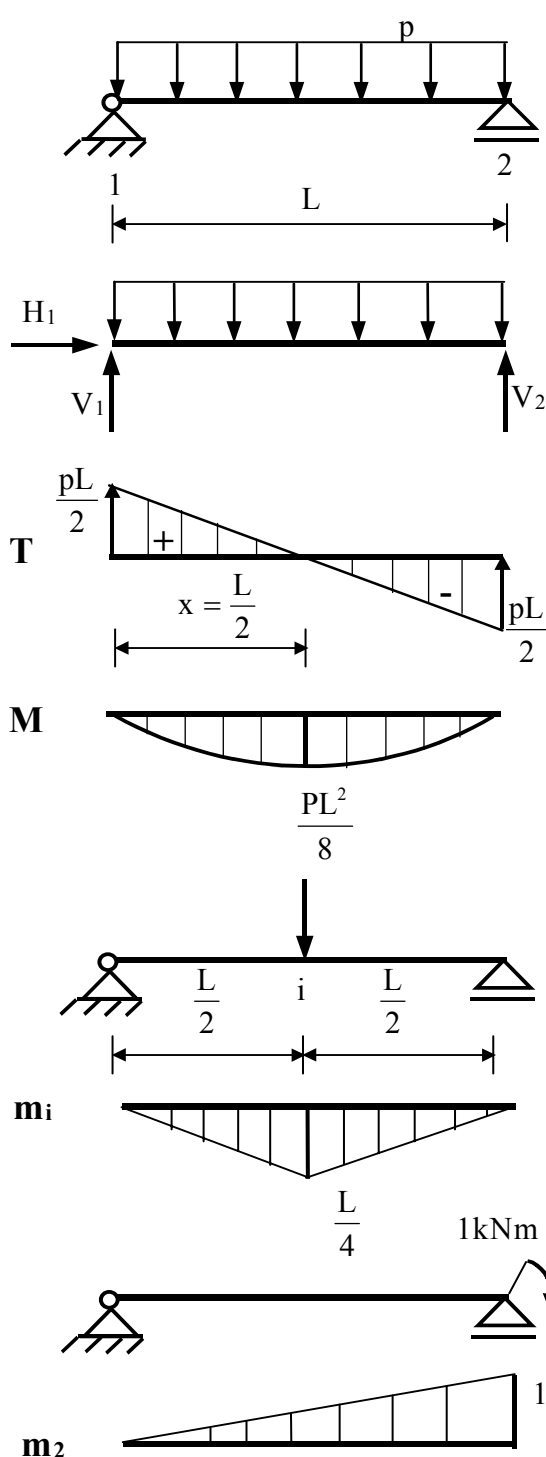


Fig. 2.6

Calculul deplasării v_i . Se încarcă grinda cu o forță verticală egală cu unitatea acționînd în secțiunea respectivă și se trasează diagrama m_i (fig.2.6). De observat că ambele diagrame de moment încovoietor (M și m_i) sunt simetrice. Utilizînd regula lui Verschiagin se obține

$$\sum X_i = 0 \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \quad pL \cdot \frac{L}{2} - V_2 \cdot L = 0 \quad V_2 = \frac{pL}{2}$$

$$\sum M_2 = 0 \quad -pL \cdot \frac{L}{2} + V_1 \cdot L = 0 \quad V_1 = \frac{pL}{2}$$

Diagrama de forță tăietoare

Diagrama de forță tăietoare se deschide în secțiunea 1 cu valoarea $T_1 = \frac{pL}{2}$ și are o variație liniară. Într-o secțiune curentă expresia forței tăietoare este $T_x = \frac{pL}{2} - p \cdot x$

În secțiunea 2 ($x=L$), forța tăietoare are valoarea $-\frac{pL}{2}$ și se încheie cu valoarea reacțiunii $V_2 = \frac{pL}{2}$.

Forța tăietoare are valoarea egală cu zero la mijlocul deschiderii

Diagrama de moment încovoietor

Momentul încovoietor are o variație parabolică, în secțiunile de la capete avînd valoarea zero. Într-o secțiune curentă expresia momentului încovoietor este

$$M_x = \frac{pL}{2} \cdot x - px \cdot \frac{x}{2}$$

Valoarea maximă a momentului încovoietor se obține în secțiunea în care se anulează forța tăietoare, adică

$$x = \frac{L}{2}, \text{ și este } M_{\max} = \frac{pL^2}{8}.$$

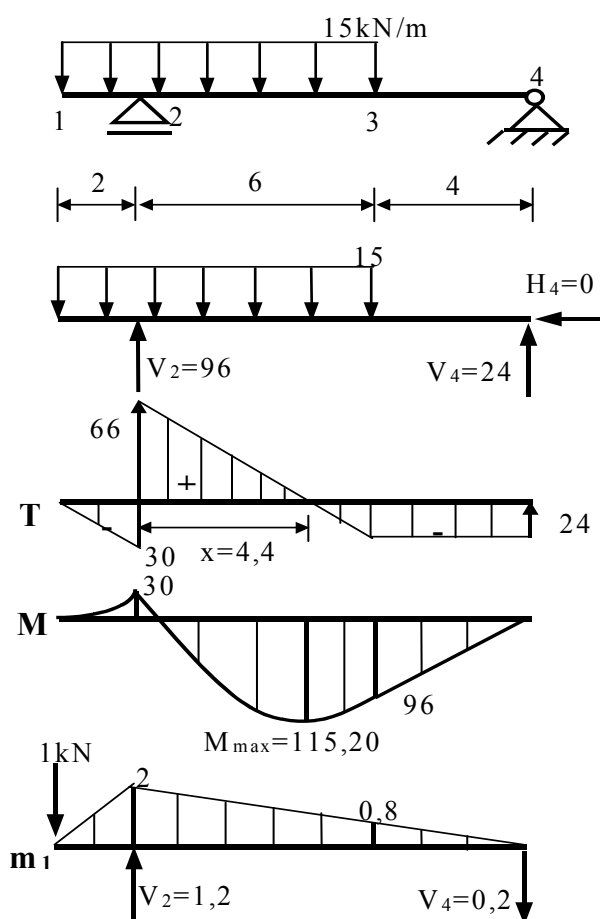
$$v_i = \int \frac{Mm_i}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{pL^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{pL^2}{32} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \right) = \frac{5pL^4}{384EI} \text{ (m)}$$

Calculul rotirii θ_2 . Se încarcă grinda cu un moment concentrat egal cu unitatea acționând în secțiunea 2 și se trasează diagrama m_2 (fig. 2.6). Utilizând regula lui Verschiagin se obține

$$\theta_2 = \int \frac{Mm_2}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot L \cdot \frac{pL^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{pL^3}{24EI} \text{ (rad)}$$

2.1.3. Grinda simplu rezemată cu consolă

Exemplul 2.4. Pentru grinda simplu rezemată cu consolă din figura 2.7. să se traseze diagramele de eforturi și să se calculeze deplasarea pe verticală a capătului liber al consolei.



Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 & H_4 &= 0 \\ \sum M_2 &= 0 & 15 \cdot 8 \cdot 2 - V_3 \cdot 10 &= 0 & V_4 &= 24 \text{ kN} \\ \sum M_4 &= 0 & V_2 \cdot 10 - 15 \cdot 8 \cdot 8 &= 0 & V_2 &= 96 \text{ kN} \end{aligned}$$

Diagrama de forță tăietoare

În capătul consolei forța tăietoare este nulă. Pe intervalul 1-2 forța tăietoare variază liniar pînă la -30 kN.

În secțiunea 2, are loc un salt egal cu reacțiunea V_2 de la -30 la $+96$. În continuare forța tăietoare variază liniar, într-o secțiune curentă avînd expresia

$$T_x = 66 - 15x$$

În secțiunea 3 forța tăietoare este

$$T_3 = 66 - 15 \cdot 6 = -24$$

Pe intervalul 3-4 forța tăietoare rămîne constantă, iar în secțiunea 4 se închide cu reacțiunea V_4 .

Diagrama de moment încovoietor

Pe consola 1-2 momentul încovoietor are o variație parabolică de la 0 la -30 , fibra întinsă fiind cea superioară.

Fig. 2.7

Pe intervalul 2-3 variația momentului încovoietor rămîne parabolică, avînd valoare maximă la distanța $x=4,4$ m față de secțiunea 2, respectiv

$M_{\max} = -14 \cdot 6,6 \cdot \frac{6,6}{2} + 96 \cdot 4,4 = 115,2 \text{ kNm}$, fibra întinsă fiind cea inferioară. În secțiunea 3 momentul încovoietor are valoarea $M_3 = 96 \cdot 6 - 15 \cdot 8 \cdot 4 = 96 \text{ kNm}$. Pe intervalul 3-4 momentul încovoietor are variație liniară, iar în secțiunea 4 are valoarea zero.

Calculul deplasării v_1 Pentru calculul deplasării pe verticală a capătului liber al consolei, se trasează diagrama de moment încovoietor produsă de o forță egală cu unitatea acționînd în secțiunea respectivă (m_1).

Diagrama M de momente încovoietoare poate fi descompusă în suprafețe simple, astfel că deplasarea v_1 capătă forma

$$v_1 = \int \frac{M m_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{15 \cdot 2^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0,8 \right) - \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 0,8 \right) - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{15 \cdot 6^2}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 \right) \right] - \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = -\frac{49,6}{EI} (\text{m})$$

deci deplasarea se produce în sus.

Exemplul 2.5. Să se traseze diagramele de eforturi la grinda simplu rezemată înclinată din figura 2.8.

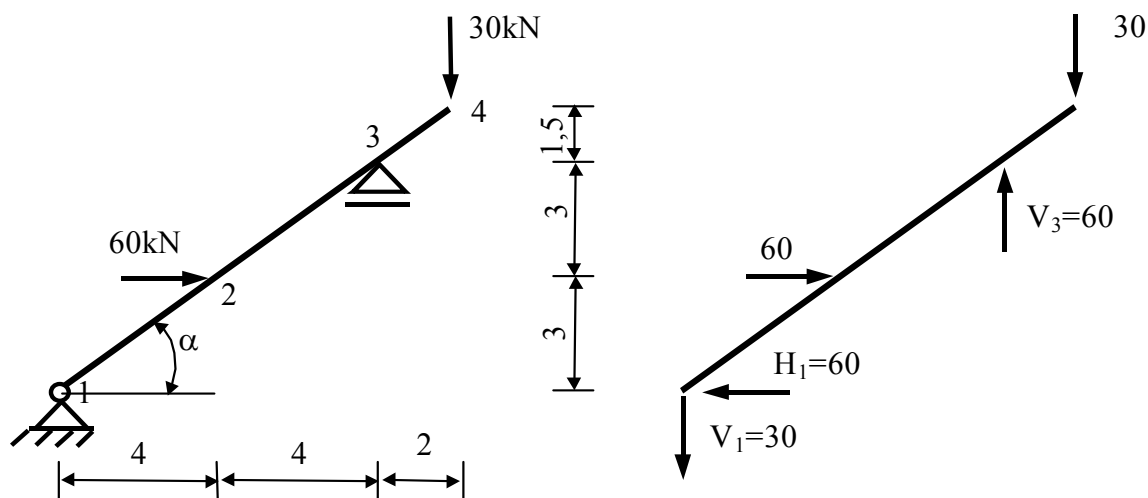


Fig. 2.8

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \quad 60 - H_1 = 0 & \quad H_1 = 60 \text{ kN} \\ \sum M_1 = 0 & \quad 60 \cdot 3 - V_3 \cdot 8 + 30 \cdot 10 = 0 & \quad V_3 = 60 \text{ kN} \\ \sum M_3 = 0 & \quad 60 \cdot 6 - V_1 \cdot 8 - 60 \cdot 3 + 30 \cdot 2 = 0 & \quad V_1 = 30 \text{ kN} \end{aligned}$$

Diagrama de forță axială (fig. 2.9,a) Pe intervalul 1-2 forța axială este constantă și are valoarea $N_{12} = 30 \cdot \sin \alpha + 60 \cdot \cos \alpha = 66 \text{ kN}$

Pe intervalul 2-3 forța axială este

$$N_{23} = N_{12} - 60 \cdot \cos \alpha = 18 \text{ kN}$$

Pe intervalul 3-4 forța axială este

$$N_{34} = N_{23} - 60 \cdot \sin \alpha = -18 \text{ kN} \text{ sau de la dreapta } N_{43} = -30 \cdot \sin \alpha = -18 \text{ kN}$$

Diagrama de forță tăietoare (fig. 2.9,b)

În secțiunea 1, forța tăietoare este $T_{12} = -30 \cdot \cos \alpha + 60 \cdot \sin \alpha = 15 \text{ kN}$. Pe intervalul 1-2, forța tăietoare este constantă.

Pe intervalul 2-3 forța tăietoare este

$$T_{23} = T_{12} - 60 \cdot \sin \alpha = -24 \text{ kN}$$

Pe intervalul 3-4 forța tăietoare este

$$T_{34} = T_{23} + 60 \cdot \cos \alpha = 24 \text{ kN} \text{ sau de la dreapta } T_{43} = 30 \cdot \cos \alpha = 24 \text{ kN}$$

Diagrama de moment încovoietor (fig. 2.9,c) În secțiunea 2 momentul încovoietor este $M_2 = 60 \cdot 3 - 30 \cdot 4 = 60 \text{ kNm}$, fibra întinsă fiind cea inferioară, iar în secțiunea 3 $M_3 = 60 \cdot 6 - 30 \cdot 8 - 60 \cdot 3 = -60 \text{ kNm}$, fibra întinsă fiind cea superioară. Variația momentului ncovoietor pe cele trei intervale este liniară.

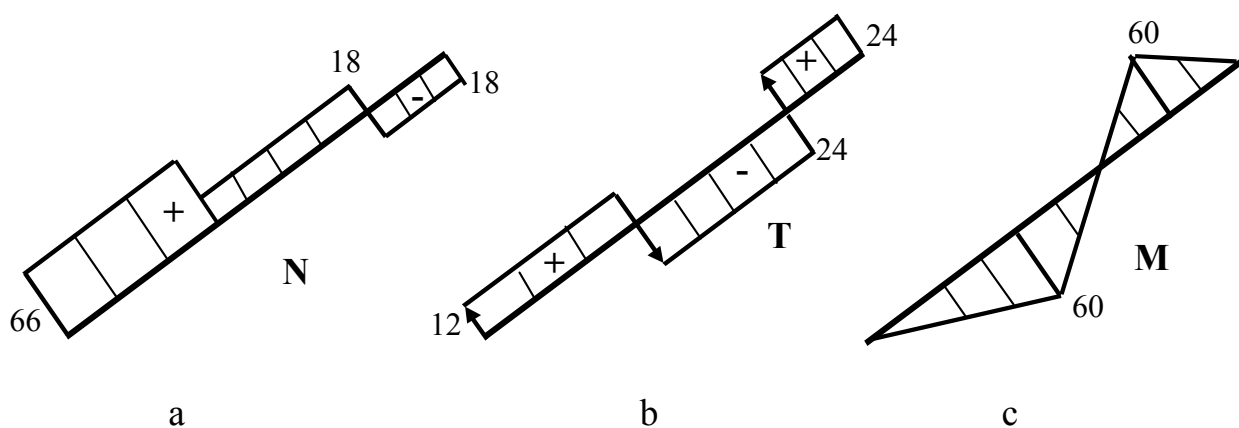


Fig. 2.9

Exemplul 2.6. Să se traseze diagramele de eforturi la grinda simplu rezemata inclinată din figura 2.10. Față de exemplul anterior, reazemul din secțiunea 3 este normal la axa barei.

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_1 = 0 \quad 60 \cdot 3 - V_3 \cdot 10 + 30 \cdot 10 = 0 \quad V_3 = 48 \text{ kN}$$

$$\sum X_i = 0 \quad 60 - H_1 - V_3 \cdot \sin \alpha = 0 \quad H_1 = 31,2 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0 \quad H_1 \cdot 6 - V_1 \cdot 8 - 60 \cdot 3 + 30 \cdot 2 = 0 \quad V_1 = 8,4 \text{ kN}$$

Verificare

$$\sum Y = 0 \quad -8,4 + 48 \cdot \cos \alpha - 30 = 0$$

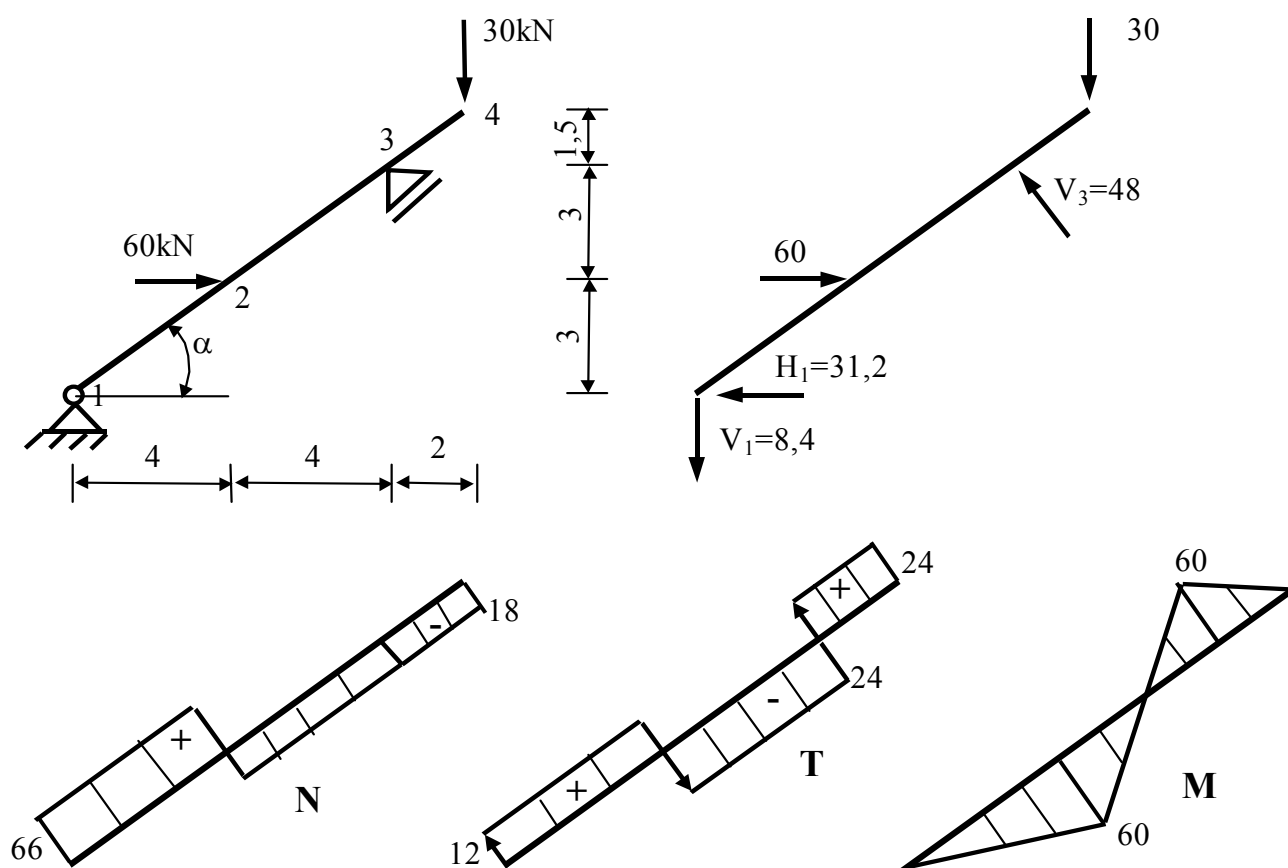


Fig. 2.10

Diagrama de forță axială

$$N_{12} = 31,2 \cdot \cos \alpha + 8,4 \cdot \sin \alpha = 30 \text{ kN}$$

$$N_{23} = N_{12} - 60 \cdot \cos \alpha = -18 \text{ kN}$$

$$N_{34} = N_{23}$$

Diagrama de forță tăietoare

$$T_{12} = 31,2 \cdot \sin \alpha - 8,4 \cdot \cos \alpha = 12 \text{ kN}$$

$$T_{23} = T_{12} - 60 \cdot \sin \alpha = -24 \text{ kN}$$

$$T_{34} = T_{23} + 48 = 24 \text{ kN}$$

Diagrama de moment încovoietor

$$M_2 = 31,2 \cdot 3 - 8,4 \cdot 4 = 60 \text{ kNm}$$

$$M_3 = 31,2 \cdot 6 - 8,4 \cdot 8 - 60 \cdot 3 = -60 \text{ kNm}$$

Se observă că indiferent de înclinația reazemului simplu, diagramele de forță tăietoare și de moment încovoietor rămân nemodificate.

2.2. GRINZI COMPUSE

Grinzile compuse (grinzi Gerber) sunt sisteme static determinate alcătuite din grinzi cu console, grinzi dublu articulate și console legate între ele prin articulații. O grindă compusă se obține dintr-o grindă continuă pe mai multe reazeme, grindă static nedeterminată, prin introducerea unui număr de articulații egal cu numărul gradelor de nedeterminare statică. Introducerea articulațiilor trebuie făcută cu grijă pentru a se obține efectiv un sistem static determinat. În caz contrar se ajunge în situația ca părți din grindă să fie static nedeterminate, iar alte părți să fie mecanisme. Poziția legăturilor cu terenul permite clasificarea grinzilor componente în grinzi principale și grinzi secundare.

Pentru exemplificare se consideră grinda continuă din figura 2.11,a care este de două ori static nedeterminată.

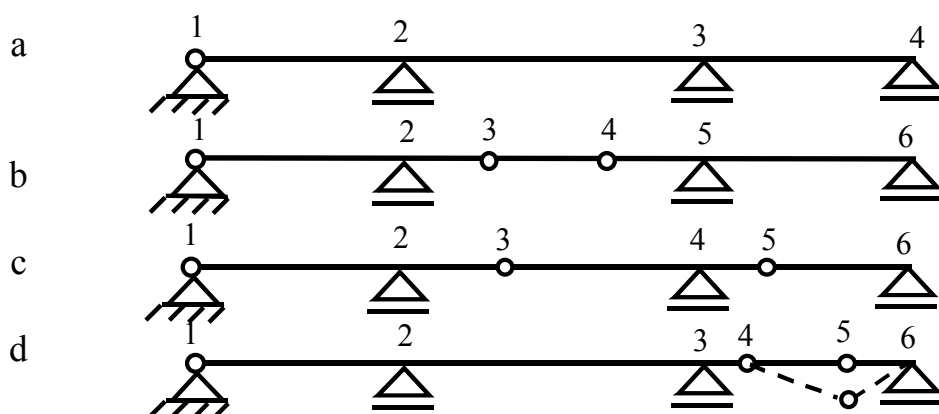


Fig. 2.11

În figura 2.11,b și c se prezintă două moduri corecte de amplasare a articulațiilor interioare. Astfel grinda din figura 2.11,b este formată din două grinzi principale 1-2-3 și 4-5-6 și o grindă secundară 3-4. Grinda din figura 2.11,c este formată dintr-o grindă principală 1-2-3 și două grinzi secundare 3-4-5 și 5-6, grinzi care se reazămă în scară pe grinda principală. În figura 2.11,d se prezintă un mod defectuos de amplasare a articulațiilor interioare. Se observă că grinda 1-2-3-4 este static nedeterminată, iar porțiunea 4-5-6 este un mecanism.

Reacțiunile la o grindă compusă se pot determina în două moduri:

- fie se descompune grinda în părți componente și utilizând ecuațiile de echilibru ale fiecărei grinzi componente se determină atât reacțiunile din legăturile exterioare cât și cele din legăturile interioare,

- fie se determină numai reacțiunile din legăturile exterioare utilizând condiția de echilibru pentru ansamblu plus condiții de echilibru al părților (condiții de momente egale cu zero în articulațiile interioare).

Utilizând prima modalitate, calculul începe cu grinzile secundare apoi se rezolvă grinzile principale asupra cărora se aplică ca acțiuni și reacțiunile din grinzile secundare adiacente.

În ceea ce privește trasarea diagramelor de eforturi, acestea se poate realiza în două moduri:

- fie se trasează pe fiecare grindă componentă și apoi se alipesc;
- fie prin trasarea directă parcurgând structura de la stînga la dreapta.

Pentru exemplele următoare se consideră prima modalitate de determinare a reacțiunilor și cea de-a doua modalitate de trasare a diagramelor de eforturi.

În ceea ce privește calculul deplasărilor elastice se procedează la fel ca la grinda simplu rezemată.

Exemplul 2.7 Pentru grinda compusă din figura 2.12 să se traseze diagramele T și M și să se calculeze deplasările v_5 și θ_3^{rel} .

Grinda este formată dintr-o grindă principală 1-2-3 și o grindă secundară 3-4.

Calculul reacțiunilor. Deoarece forțele aplicate sunt verticale, reacțiunea orizontală $H_1=0$ se obține din condiția de echilibru pentru întreg ansamblu.

Se începe cu grinda secundară și apoi se trece la grinda principală care în secțiunea 3 va fi încărcată cu o forță egală și de sens contrar cu reacțiunea V_3 .

- grinda secundară 3-4

$$\sum M_3 = 0 \quad 15 \cdot 8 \cdot 4 - V_4 \cdot 6 = 0 \quad V_4 = 80 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0 \quad V_3 \cdot 6 - 15 \cdot 8 \cdot 2 = 0 \quad V_3 = 40 \text{ kN}$$

- grinda principală 1-2-3

$$\sum M_1 = 0 \quad 80 \cdot 4 - V_2 \cdot 8 + 40 \cdot 10 = 0 \quad V_2 = 90 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0 \quad V_1 \cdot 8 - 80 \cdot 4 + 40 \cdot 2 = 0 \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

Diagrama de forță tăietoare. În secțiunea 1 forța tăietoare are valoarea $T_1 = V_1 = 30 \text{ kN}$. Pînă în secțiunea în care este aplicată forța concentrată de 80 kN, forța tăietoare rămîne constantă. În această secțiune are loc un salt în sensul de acțiune al forței concentrate, de la +30 kN la -50 kN. Pînă în secțiunea 2 forța tăietoare rămîne constantă. În această secțiune forța tăietoare prezintă un salt, egal cu reacțiunea V_2 , de la -50 kN la +40 kN. De aici rămîne constantă pînă în secțiunea 3 unde se înregistrează un dublu salt astfel încît valoarea forței tăietoare nu se modifică. Pe intervalul 3-4 forța tăietoare variază liniar, iar în secțiunea vecină punctului 4 are valoarea -50 kN. La distanța $x=2,67 \text{ m}$ de punctul 3 forța tăietoare este zero. În punctul 4 are loc un salt de la -50 kN la +30 kN, iar pe consolă forța tăietoare variază liniar de la +30 kN la 0.

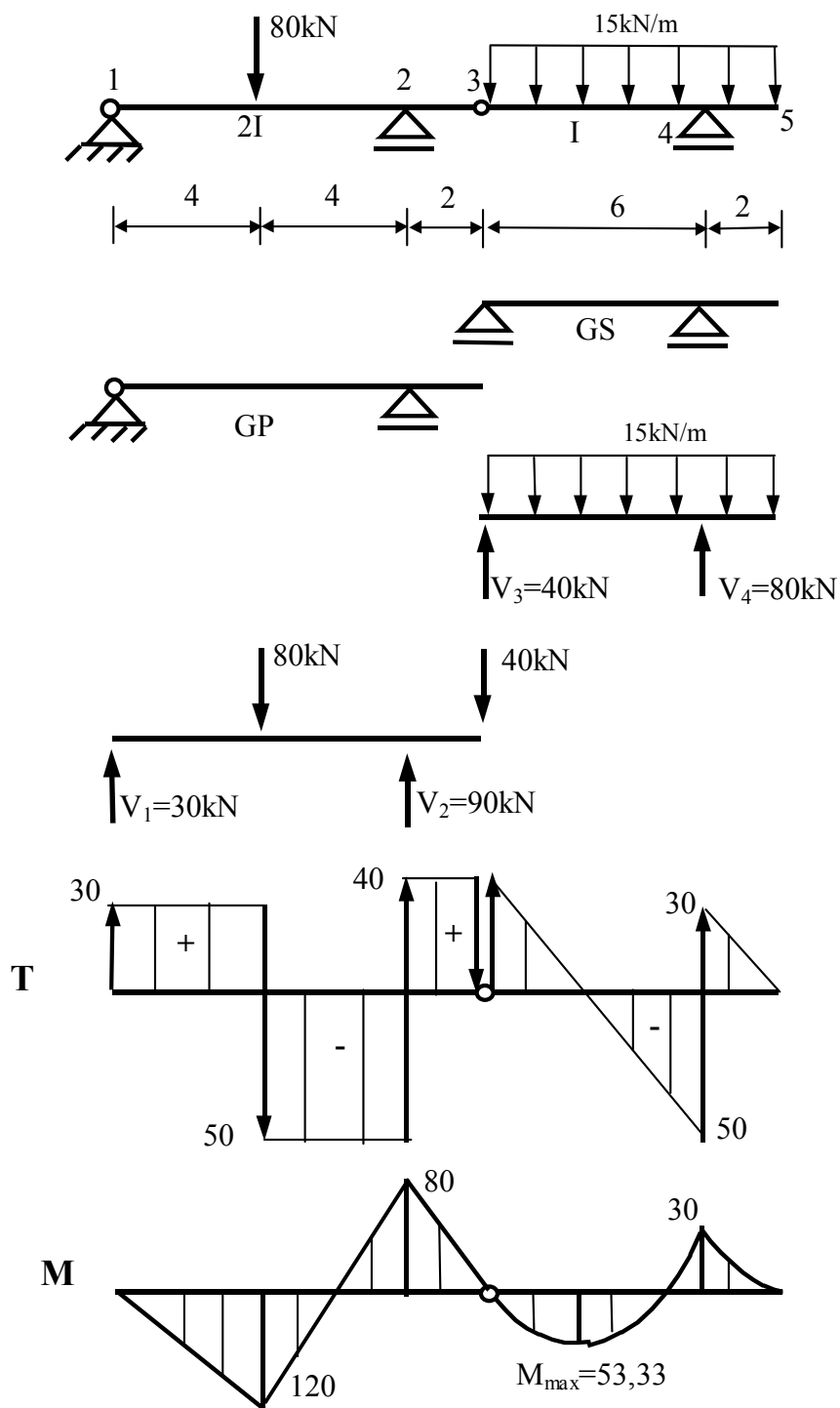


Fig. 2.12

Diagrama de moment încovoietor Din secțiunea 1 și pînă în punctul de aplicație al forței de 80kN, momentul încovoietor variază liniar, fibra întinsă fiind cea inferioară. Valoarea momentului încovoietor în această secțiune este $M = V_1 \cdot 4 = 120\text{kNm}$. În continuare momentul încovoietor are tot o variație liniară,

astfel că în punctul 2, fibra întinsă este cea superioară, iar valoarea momentului este $M_2 = 30 \cdot 8 - 80 \cdot 4 = -80 \text{ kNm}$. Pe intervalul 2-3 momentul încovoietor are o variație liniară, iar în secțiunea 3 (articulație interioară) valoarea momentului încovoietor este zero. Pe intervalul 3-4 momentul încovoietor are o variație parabolică, valoarea maximă fiind

$$M_{\max} = V_3 \cdot x - 15 \cdot \frac{x^2}{2} = 53,33 \text{ kNm (la interior, cu } x=2,67),$$

iar în secțiunea 4

$$M_4 = V_3 \cdot 8 - 15 \cdot \frac{8^2}{2} = -30 \text{ kNm (la partea superioară)}$$

Pe consolă variația momentului încovoietor este parabolică.

Calculul deplasării pe verticală a capătului consolei (v_5)

În acest scop se consideră grinda Gerber încărcată cu o forță verticală egală cu unitatea aplicată în punctul 5 (fig. 2.13,a). Se calculează reacțiunile și se trasează diagrama unitară de moment încovoietor m_{v_5} .

Deplasarea v_5 se obține prin integrarea diagramei M cu diagrama m_{v_5} , folosind regula lui Versciaghin.

$$\begin{aligned} v_5 = \int \frac{M m_{v_5}}{EI} dx = & \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{15 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{15 \cdot 2^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = -\frac{66,67}{EI} \text{ metri} \end{aligned}$$

Semnul pentru v_5 a rezultat minus, deci deplasarea se produce în sens invers forței unitare, în sus.

Calculul rotirii θ_3^{rel}

Pentru aceasta se încarcă grinda Gerber cu o pereche de momente, egale cu unitatea (fig. 2.13,b). Se calculează reacțiunile și se trasează diagrama unitară de momente încovoietoare m_3 .

Rotirea relativă se obține prin integrarea diagramei M cu diagrama m_3 folosind regula lui Vereșiaghin.

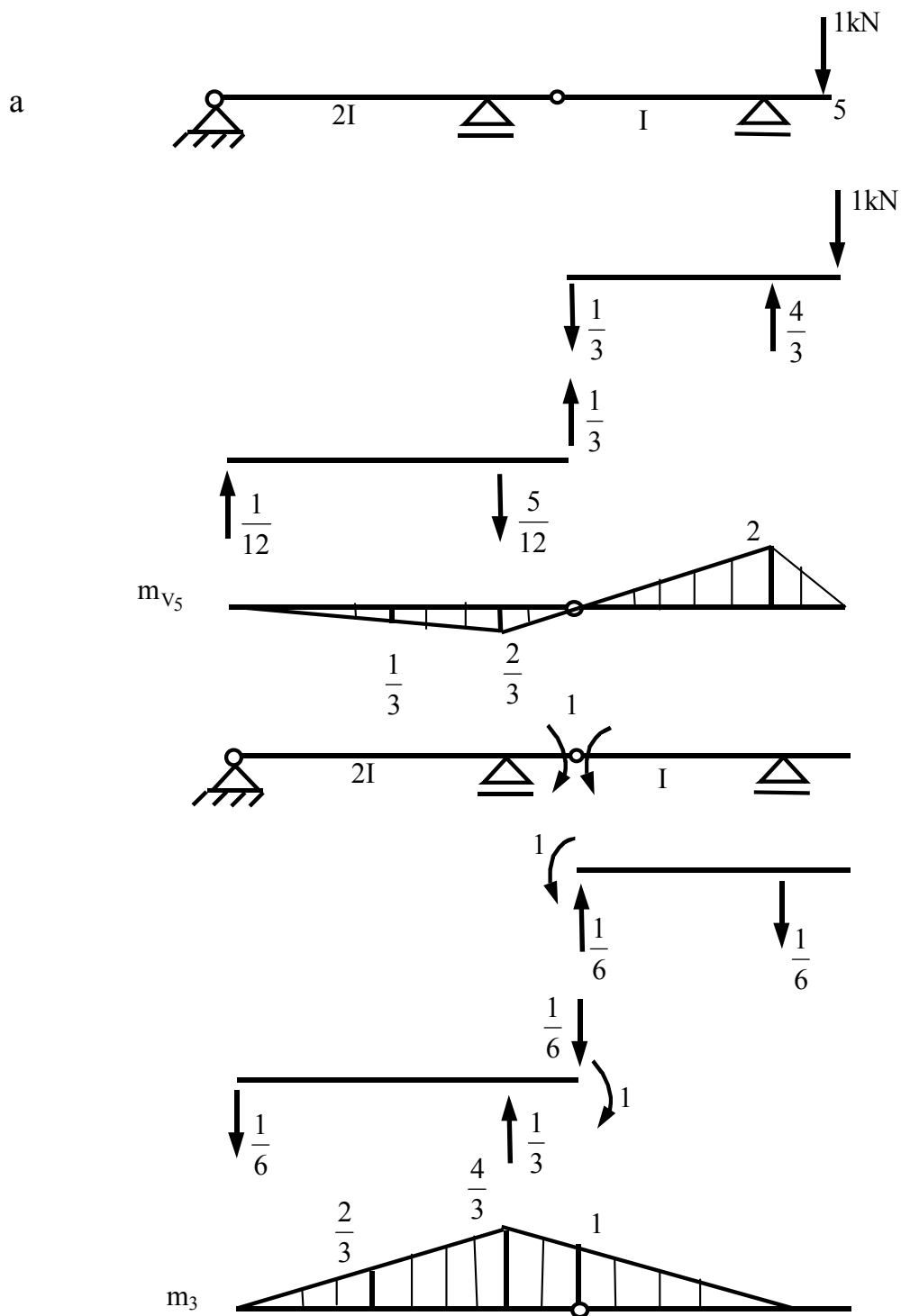


Fig. 2.13

$$\theta_3^{\text{rel}} = \int \frac{Mm_3}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{15 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = -\frac{127,22}{EI} \text{ radiani}$$

Semnul minus pentru rotirea relativă înseamnă că ea se produce în sens invers sensului momentelor unitare.

Observație. Din analiza diagramelor de eforturi se observă că în dreptul articulației interioare, valoarea forței tăietoare nu se modifică, acțiunile reciproce din această secțiune ce închid și deschid diagrama anulându-se reciproc, iar panta la diagama M rămâne aceeași atât la stânga cât și la dreapta articulației, dar momentul încovoietor trece prin valoarea zero.

Exemplul 2.8 Pentru grinda Gerber din figura 2.14, să se traseze diagramele de eforturi și să se calculeze deplasarea v_4 .

Grinda este formată dintr-o grindă principală 1-2 (grinda în consolă) și două grinzi secundare 2-3-4 și 4-5, așa cum este prezentat în figura 2.14.

Calculul reacțiunilor. Deoarece în articulația 4 este aplicată o forță concentrată, aceasta va fi considerată în calculul reacțiunilor ca acționând pe una dintre grinzile adiacente articulației. În acest scop forța a fost considerată pe grinda 2-3-4. Deoarece forțele sunt verticale, reacțiunea $H_1=0$ se obține din condiția de echilibru pentru întreg ansamblu.

- grinda secundară 4-5

$$\sum M_4 = 0 \quad - V_5 \cdot 6 + 30 = 0 \quad V_5 = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M_5 = 0 \quad - V_4 \cdot 6 + 30 = 0 \quad V_4 = 5 \text{ kN}$$

- grinda secundară 2-3-4

$$\sum M_2 = 0 \quad - V_3 \cdot 10 - 5 \cdot 12 + 60 \cdot 12 = 0 \quad V_3 = 66 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0 \quad - V_2 \cdot 10 - 5 \cdot 2 + 60 \cdot 2 = 0 \quad V_2 = 11 \text{ kN}$$

- grinda principală 1-2

$$\sum M_1 = 0 \quad - M_3 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 11 \cdot 4 = 0 \quad M_3 = 36 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0 \quad V_1 - 10 \cdot 4 + 11 = 0 \quad V_1 = 29 \text{ kN}$$

Diagramele de forțe tăietoare și de moment încovoietor au fost trasate direct pe întreaga structură (fig. 2,14).

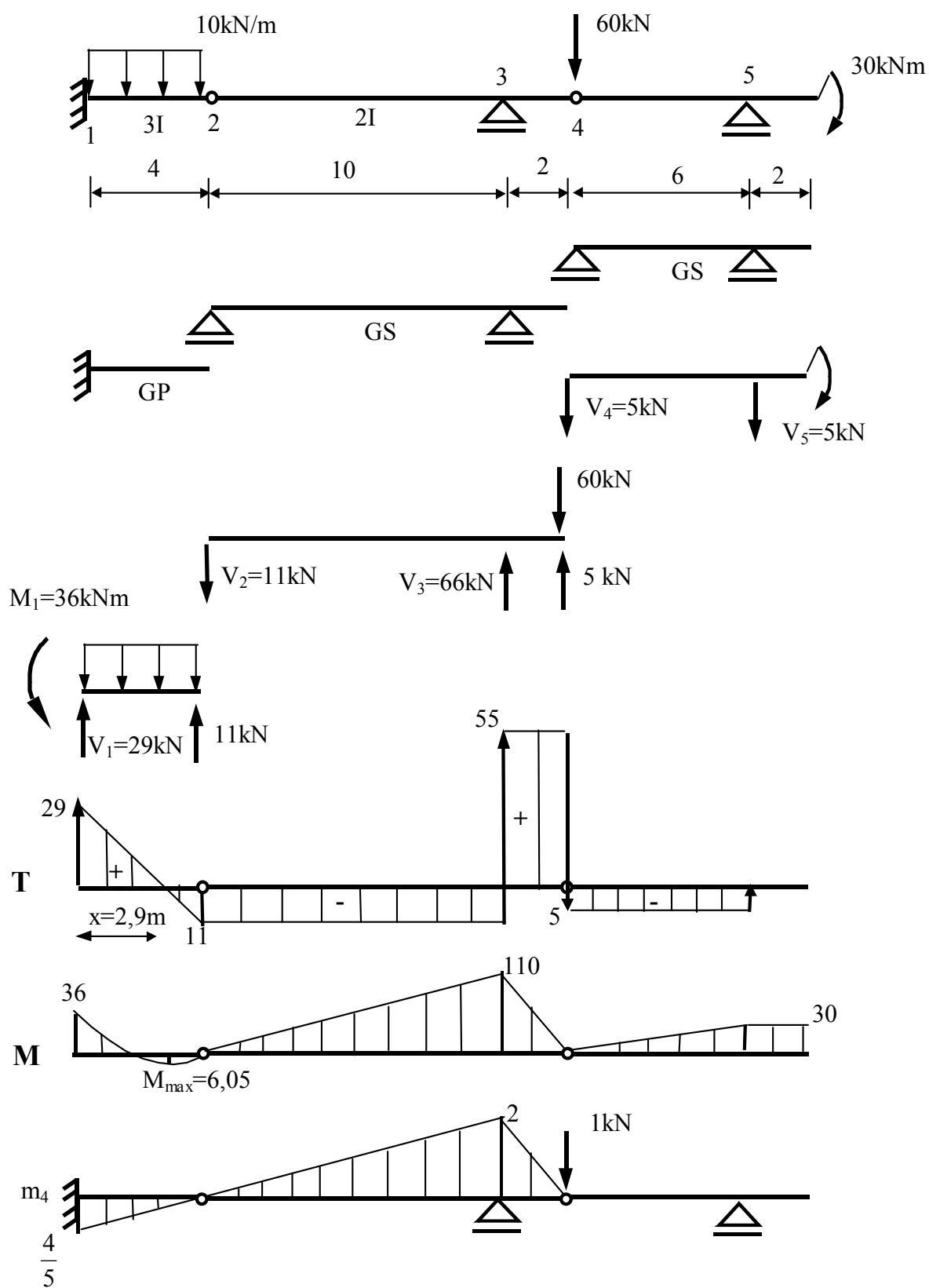


Fig. 2.14

Calculul deplasării v_4 . Se încarcă grinda Gerber cu o forță verticală egală cu unitatea aplicată în punctul 4 și se trasează diagrama unitară de moment încovoietor m_4 (fig. 2.14).

Deplasarea v_4 se obține prin integrarea diagramei M cu diagrama m_4 folosind regula lui Vereșciaghin.

$$v_4 = \int \frac{Mm_4}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{2} \cdot 4 \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{518,311}{EI} \text{ m}$$

Deci deplasarea se produce în jos.

Observație. În dreptul articulației interioare 4, în diagrama de forță tăietoare apare un salt în sensul forței și egal cu valoarea forței, iar în diagrama de moment încovoietor are loc o schimbare a pantei, valoarea momentului încovoietor fiind zero.

2.3. CADRE PLANE

2.3.1. Generalități

Structurile de rezistență în formă de cadre reprezintă categoria de structuri cea mai frecvent utilizată în practică. Cadrele static determinate se întâlnesc rar în practică dar au o importanță deosebită în calculul cadrelor static nedeterminate prin metoda eforturilor.

Cadrele sunt alcătuite din bare legate între ele rigid sau articulat și fixate de teren printr-un număr de legături astfel încât să se realizeze invariabilitatea geometrică.

Punctele de legătură între bare se numesc **noduri**. Acestea pot fi rigide, dacă barele ce se întâlnesc sunt încastrate între ele, sau articulate, dacă barele ce se întâlnesc sunt articulate între ele.

Un nod rigid (fig. 2.15,a) se caracterizează prin faptul că secțiunile transversale ale barelor ce se întâlnesc în acest punct au aceeași translație și aceeași rotație (adică unghiul inițial dintre bare se păstrează și în poziție deformată).

Un nod articulat (fig. 2.15,b) se caracterizează prin faptul că secțiunile transversale ale barelor care se întâlnesc în acest punct au aceeași translație. În ceea ce privește rotația relativă, aceasta este liberă să se producă astfel că unghiul dintre axele barelor se modifică.

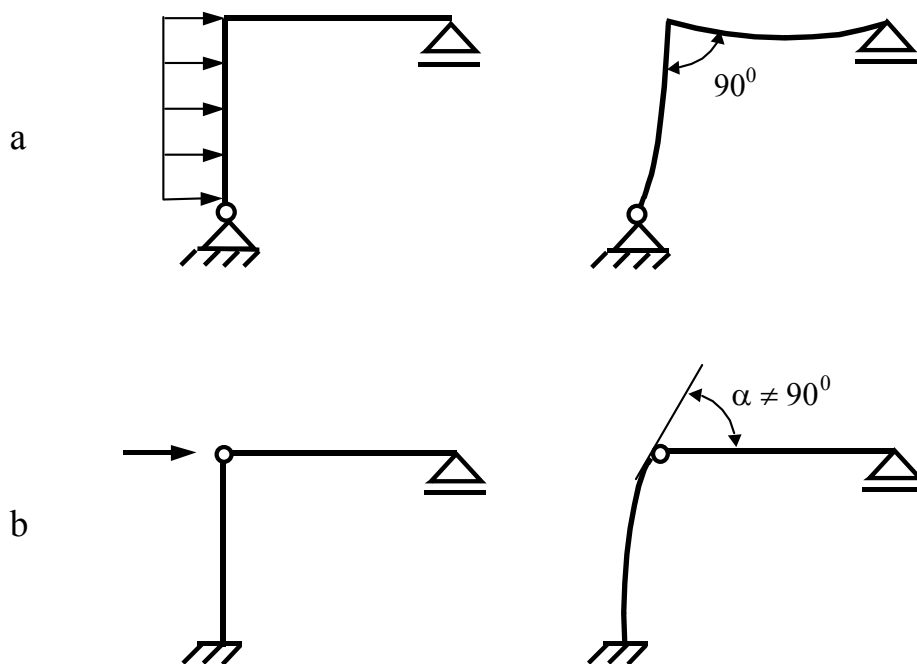


Fig.

2.15

Rezolvarea cadrelor static determinate necesită calculul reacțiunilor, trasarea diagramelor de eforturi cu determinarea valorilor maxime și calculul deplasărilor elastice. Reacțiunile se determină prin metodele prezentate la începutul capitolului II. Trasarea diagramelor de eforturi se realizează respectând relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări stabilite la grinda dreaptă.

Observație. La trasarea diagramelor de forță axială și forță tăietoare trebuie avut în vedere faptul că pentru secțiunile din imediata vecinătate a nodului aceste eforturi își modifică brusc valoarea deoarece se schimbă direcția axelor barelor, respectiv direcția pe care se efectuează proiecția.

Pentru un nod rigid alcatuit din două bare, în secțiunile de lângă nod momentul încovoiător are aceeași valoare dar sens contrar, iar la un nod format din trei sau mai multe bare suma momentelor încovoiătoare din secțiunile de lângă nod trebuie să fie egală cu zero.

Modul de conducere a calculului practic este prezentat în continuare prin intermediul unor exemple numerice.

Exemplul 2.9 Să se traseze diagramele de eforturi la structura din figura 2.16 și să se calculeze deplasarea pe orizontală a secțiunii 2.

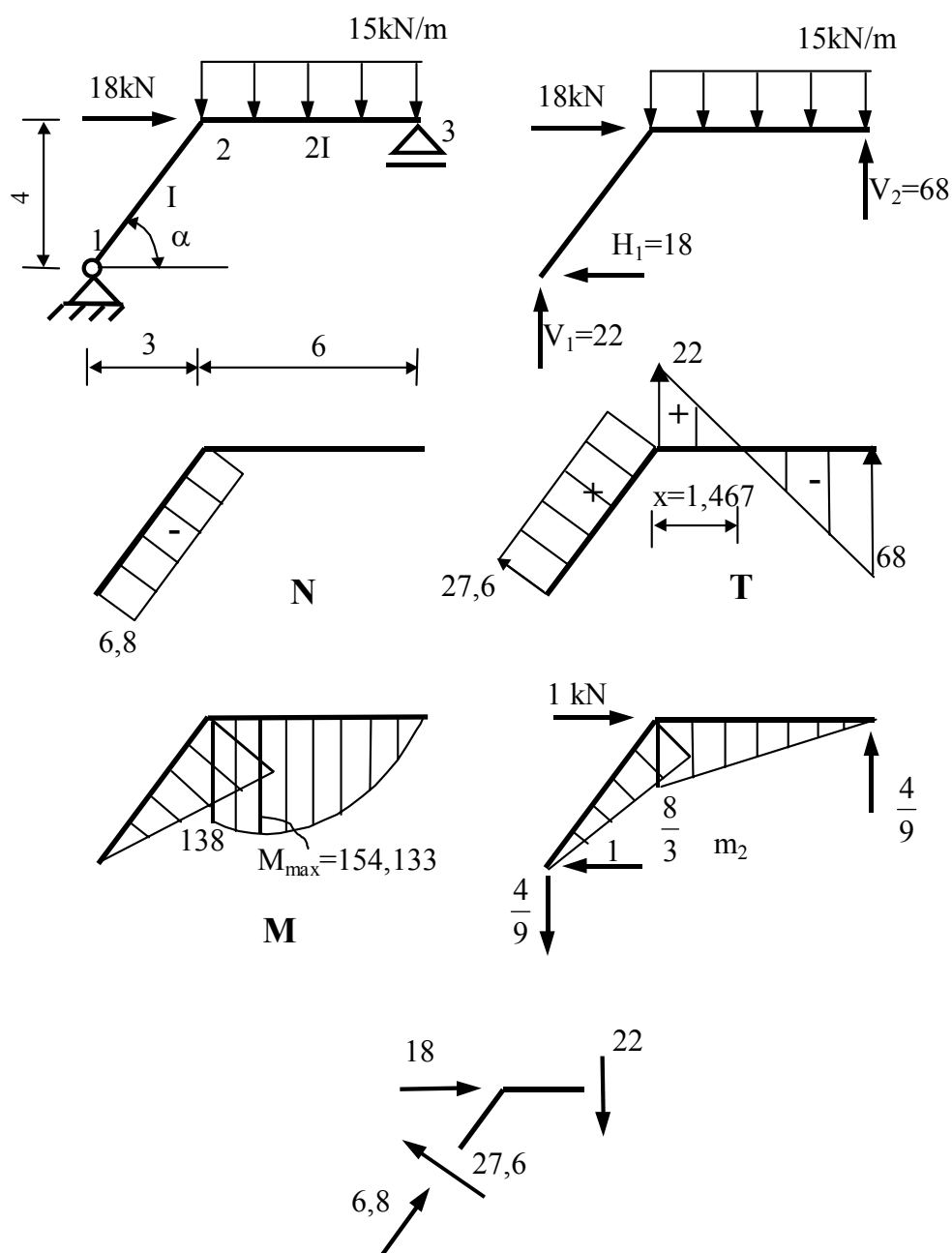


Fig. 2.16

Calculul reacțiunilor

$$\begin{array}{lll}
 \sum X_i = 0 & -H_1 + 18 = 0 & H_1 = 18\text{kN} \\
 \sum M_1 = 0 & 18 \cdot 4 + 15 \cdot 6 \cdot 6 - V_3 \cdot 9 = 0 & V_3 = 68\text{kN} \\
 \sum M_3 = 0 & V_1 \cdot 9 + 18 \cdot 4 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = 0 & V_1 = 22\text{kN}
 \end{array}$$

Verificare $\sum Y_i = 0 \quad V_1 - 15 \cdot 6 + V_3 = 22 - 90 + 68 = 0$

Diagrama de forță axială Pe stîlpul înclinat, în secțiunea 1, forța axială se obține proiectînd reacțiunile V_1 și H_1 pe direcția axei barei

$$N_{12} = -V_1 \cdot \sin \alpha + H_1 \cdot \cos \alpha = -22 \cdot 0,8 + 18 \cdot 0,6 = -6,8 \text{ kN}$$

Pe rigla 2-3 forța axială este zero ($N = H_1 - 18 = 0$)

Diagrama de forță tăietoare Pe stîlpul înclinat în secțiunea 1 forța tăietoare se obține proiectînd reacțiunile H_1 și V_1 pe normala la axa barei, respectiv

$$T_{12} = V_1 \cdot \cos \alpha + H_1 \cdot \sin \alpha = 22 \cdot 0,6 + 18 \cdot 0,8 = 27,6 \text{ kN}$$

Pînă în secțiunea 2 forța tăietoare este constantă. În secțiunea 2 pe riglă forța tăietoare este $T_{23} = V_1 = 22 \text{ kN}$. Pe riglă forța tăietoare prezintă variație liniară, într-o secțiune curentă expresia sa fiind

$$T_x = 22 - 15 \cdot x$$

În secțiunea 3 forța tăietoare are valoarea $T_{32} = V_1 - 15 \cdot 6 = -68 \text{ kN}$. Forța tăietoare se anulează la $x=1,467 \text{ m}$ față de secțiunea 2.

Diagrama de moment încovoietor În secțiunea 1 momentul încovoietor este zero. Pe stîlpul 1-2 momentul încovoietor are o variație liniară, în secțiunea 2 avînd valoarea $M_2 = V_1 \cdot 3 + H_1 \cdot 4 = 22 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 138 \text{ kNm}$ (fibra întinsă este cea inferioară).

În secțiunea 2 pe riglă momentul încovoietor este același și întinde fibra de jos. Pe intervalul 2-3, momentul încovoietor are variație parabolică, într-o secțiune curentă avînd expresia

$$M_x = V_1 \cdot (3 + x) + H_1 \cdot 4 - 15 \cdot \frac{x^2}{2}$$

La distanța $x=1,467 \text{ m}$ de secțiunea 2, momentul încovoietor are valoare maximă, $M_{\max}=154,133 \text{ kNm}$. În secțiunea 3 momentul încovoietor este zero.

Verificarea corectitudinii diagramelor de eforturi (a valorilor acestora) se face utilizînd condiția de echilibru static al nodurilor sub acțiunea forțelor aplicate direct în nod și a eforturilor din secțiunile înfinit vecine nodului.

Verificare nod 2

$$\sum X_i = 0 \quad 6,8 \cdot \cos \alpha - 27,6 \cdot \sin \alpha + 18 = 4,08 - 22,08 + 18 = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad 6,8 \cdot \sin \alpha + 27,6 \cdot \cos \alpha - 22 = 5,44 + 16,56 - 22 = 0$$

Calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 2 (u_2).

Se încarcă structura cu o forță orizontală, egală cu unitatea, în secțiunea 2, se calculează reacțiunile și se trasează diagrama unitară m_2 .

Deplasarea u_2 se obține prin integrarea diagramelor M și m_2 utilizînd regula lui Vereshciaghin.

$$u_2 = \int \frac{M m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 138 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 138 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{15 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \right) = \frac{1003,833}{EI} \text{ m}$$

Exemplul 2.10 Să se traseze diagramele de eforturi la structura din figura 2.17 și să se calculeze rotirea secțiunii 1.

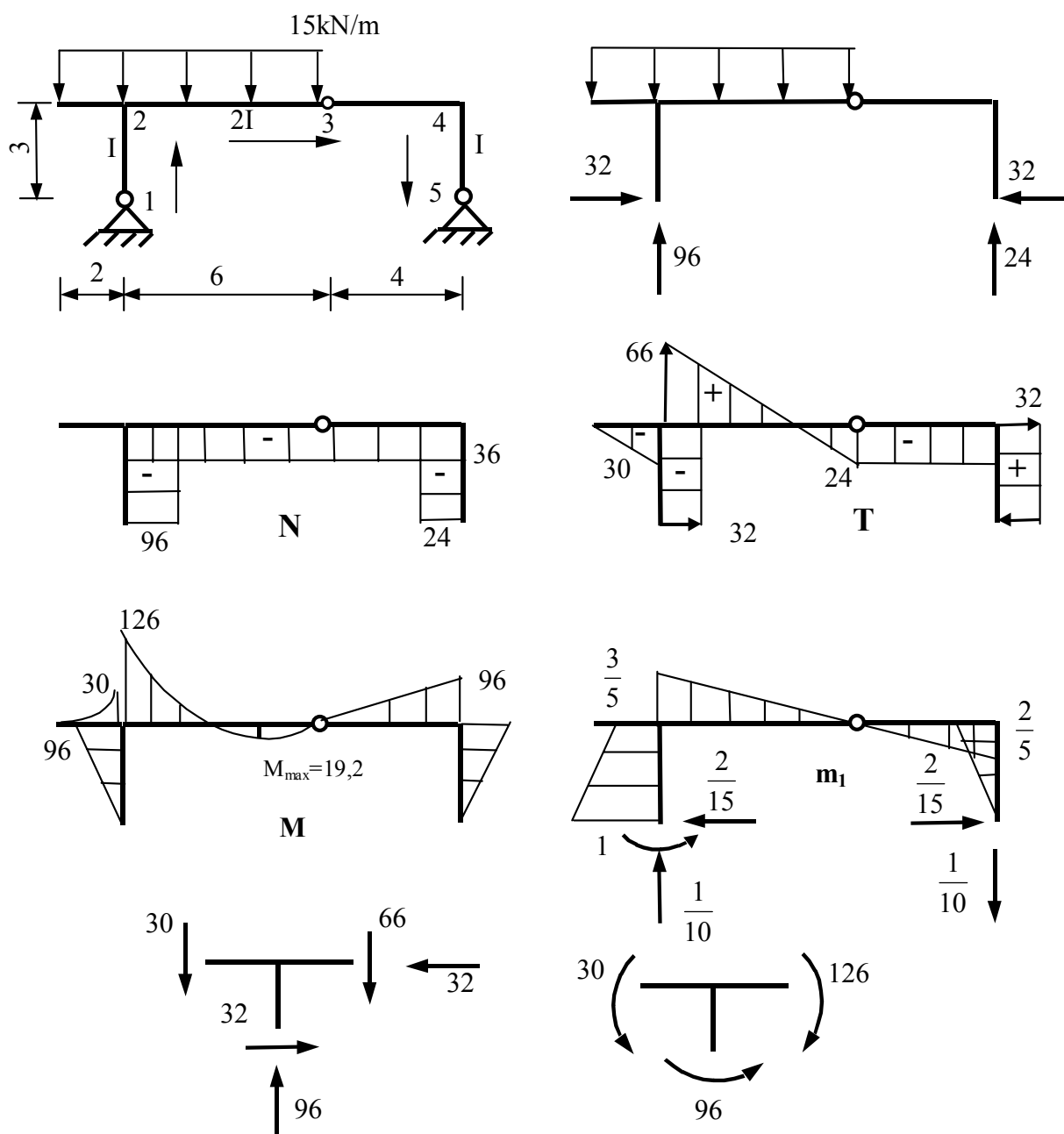


Fig. 2.17

Calculul reacțiunilor. Deoarece legăturile cu terenul sunt la același nivel reacțiunile verticale se obțin direct din ecuații de momente în raport cu punctele 1 și 5.

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0 & 15 \cdot 8 \cdot 2 - V_5 \cdot 10 &= 0 & V_5 &= 24 \text{ kN} \\ \sum M_5 &= 0 & V_1 \cdot 10 - 15 \cdot 8 \cdot 8 &= 0 & V_1 &= 96 \text{ kN} \end{aligned}$$

Verificarea corectitudinii valorilor reacțiunilor verticale se realizează scriind o ecuație de proiecție pe verticală, respectiv

$$\sum Y_i = 0 \quad V_1 - 15 \cdot 8 + V_5 = 0$$

Pentru determinarea reacțiunilor orizontale se scriu două ecuații de momente în raport cu articulația interioară (3) pentru forțele de la stînga respectiv pentru cele de la dreapta.

$$\sum M_3^{st} = 0 \quad 96 \cdot 6 - H_1 \cdot 3 - 15 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \quad H_1 = 32 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{dr} = 0 \quad H_5 \cdot 3 - 24 \cdot 4 = 0 \quad H_5 = 32 \text{ kN}$$

Verificarea corectitudinii valorilor reacțiunilor orizontale se realizează scriind o ecuație de proiecție pe orizontală

$$\sum X_i = 0 \quad H_1 - H_5 = 0$$

Diagrama de forță axială. Pe stîlpul 1-2 forța axială este de compresiune cu valoarea $N_{12} = -V_1 = -96 \text{ kN}$, pe rigla 2-4 forța axială este de compresiune cu valoarea $N_{24} = -H_1 = -32 \text{ kN}$, iar pe stîlpul 4-5 este de compresiune cu valoarea $N_{45} = -V_5 = -24 \text{ kN}$. Pe consolă forța axială este zero.

Diagrama de forță tăietoare. În secțiunea 1 forța tăietoare este negativă cu valoarea $T_{13} = -H_1 = -32 \text{ kN}$ și pînă în secțiunea 2 este constantă. Pe consolă forța tăietoare variază liniar de la zero la -30 kN . În secțiunea 2 pe riglă, în dreapta nodului 2, forța tăietoare este $T_{23} = -30 + 96 = 66 \text{ kN}$. Pe intervalul 2-3 forța tăietoare variază liniar, în secțiunea 3 are valoarea -24 kN , iar pe intervalul 3-4 forța tăietoare este negativă și constantă. Pe stîlpul 4-5 forța tăietoare este constantă și pozitivă ($T_{45} = 32 \text{ kN}$).

Diagrama de moment încovoietor. Pe stîlpul 1-2 momentul încovoietor are variație liniară cu zero în secțiunea 1 și -96 kNm în secțiunea 2 (fibra întinsă fiind la exterior). Pe consolă diagrama de moment încovoietor are o variație parabolică de la zero la -30 kNm și este trasată pe fibra superioară. În secțiunea 2 pe riglă, la dreapta nodului momentul încovoietor are valoarea 126 kNm și este situat la partea superioară. Pe intervalul 2-3 variația momentului încovoietor este parabolică, avînd un punct de maxim situat la distanța $x = 4,4 \text{ m}$ de nodul 2 și valoare zero în articulație. Pe intervalul 3-5 variația momentului încovoietor este liniară de la zero în articulația 3 la 96 kNm în secțiunea 4 (fibra întinsă fiind la partea superioară). În nodul 4, format din două bare, momentul încovoietor se rabate pe stîlp (de la exterior la exterior), de unde variația este liniară, cu valoarea zero în articulația 5.

Pentru verificarea diagramelor de eforturi se prezintă nodul 2. Condițiile de echilibru sunt:

$$\sum X_i = 0 \quad 32 - 32 = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad -30 + 96 - 66 = 0$$

$$\sum M_2 = 0 \quad -30 - 96 + 126 = 0$$

Calcul rotirii secțiunii 1. Se încarcă cadrul cu un moment egal cu unitatea, aplicat în secțiunea 1, și se trasează diagrama unitară m_1 . Rotirea secțiunii 1 se obține prin integrarea diagramelor M și m_1 utilizînd regula lui Vereshciaghin.

$$\theta_1 = \int \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \right) \right] + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 126 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{15 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \right) - \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \right) - \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \right) = -\frac{55,3}{EI} \text{ radiani}$$

Deci, rotirea are loc în sens invers momentului egal cu unitatea.

2.3.2. Cadre simetrice

Cadrele simetrice au o largă răspândire în practică. Prin structuri simetrice în raport cu o axă, se înțeleg acele structuri care au elementele componente, reazemele și legăturile interioare, simetrice. Prin simetria elementelor se înțelege atât simetria geometrică cât și simetria caracteristicilor geometrice ale secțiunilor transversale.

În figura 2.18 sunt prezentate două exemple de structuri simetrice.

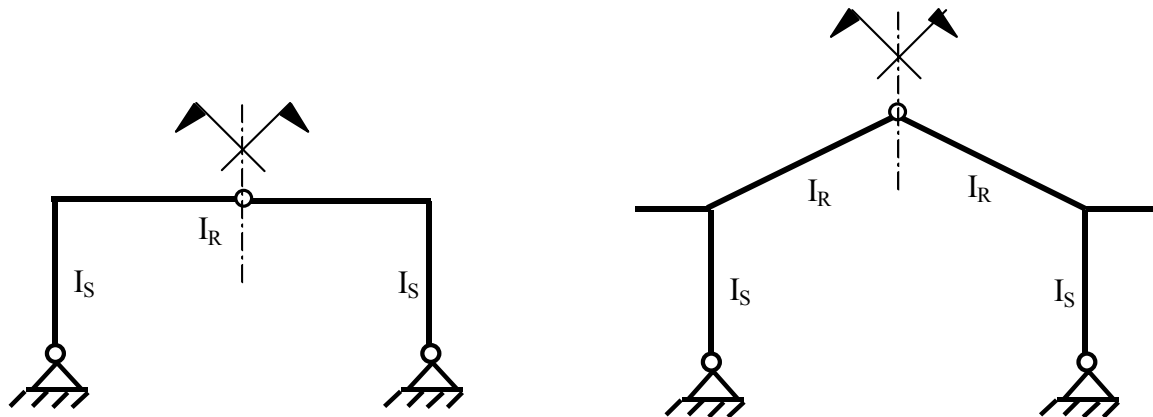


Fig. 2.18

Cadrele simetrice pot fi încărcate cu încărcări oarecare, încărcări simetrice sau cu încărcări antisimetrice. Încărcarea oarecare a unui cadru simetric se poate descompune într-o încărcare simetrică și o încărcare antisimetrică așa cum este prezentat în figura 2.19.

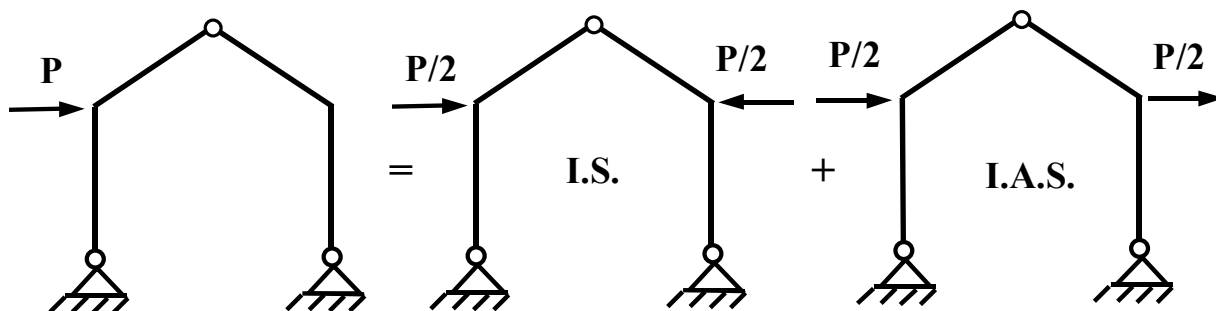


Fig. 2.19

Calculul structurilor simetrice încărcate fie simetric, fie antisimetric prezintă unele particularități deosebite care conduc la o economie de timp și de calcule.

2.3.2.1. Cadre simetrice încărcate simetric

Exemplul 2.11. Fie cadrul din figura 2.20 încărcat simetric. Să se traseze diagramele de eforturi și să se calculeze deplasările secțiunii aflate în axa de simetrie.

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}
 \sum M_1 = 0 \quad 120 \cdot 4 - V_5 \cdot 8 &= 0 & V_5 &= 60 \text{ kN} \\
 \sum M_5 = 0 \quad V_1 \cdot 8 - 120 \cdot 4 &= 0 & V_1 &= 60 \text{ kN} \\
 \sum M_3^{\text{st}} = 0 \quad 60 \cdot 4 - H_1 \cdot 3 &= 0 & H_1 &= 80 \text{ kN} \\
 \sum M_3^{\text{dr}} = 0 \quad H_5 \cdot 3 - 60 \cdot 4 &= 0 & H_5 &= 80 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Din calculul efectuat rezultă că la cadrele simetrice încărcate simetric, **reacțiunile sunt simetrice.**

Diagramele de eforturi.

$$\begin{aligned}
 N_{12} = N_{54} &= -60 \text{ kN} & N_{24} &= -80 \text{ kN} \\
 T_{12} &= -80 \text{ kN} & T_{23} &= 60 \text{ kN} & T_{34} &= -60 \text{ kN} & T_{45} &= 80 \text{ kN} \\
 M_2 = M_4 &= -80 \cdot 3 = -240 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

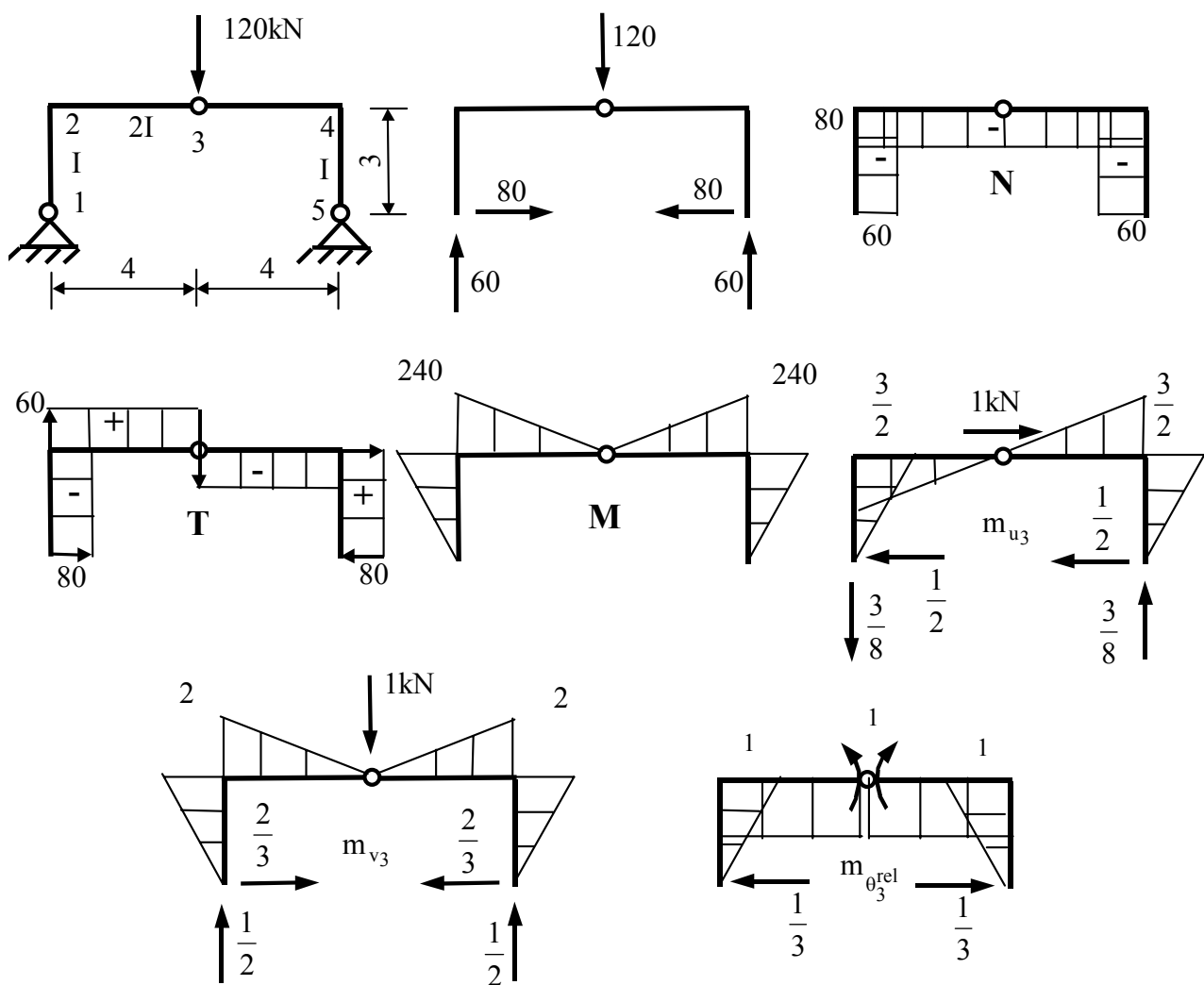


Fig. 2.20

Din analiza diagramelor de eforturi rezultă următoarele *concluzii*:

- **la structurile simetrice, încărcate simetric, diagramele de forță axială și de moment încovoietor sunt simetrice, iar diagrama de forță tăietoare este antisimetrică.**

Calculul deplasărilor secțiunii 3 (din axa de simetrie)

- deplasarea pe orizontală u_3

Încărcarea egală cu unitatea aplicată pe orizontală în secțiunea 3 conduce la o diagramă unitară de moment încovoietor, m_{u_3} , antisimetrică.

$$u_3 = \int \frac{m_{u_3} M}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = 0$$

În expresia deplasării u_3 , termenii sunt doi câte doi egali și de semn contrar.

-deplasarea pe verticală v_3

Încărcarea pe verticală egală cu unitatea aplicată în secțiunea 3 este o încărcare simetrică și în consecință diagrama unitară de moment încovoietor m_{V_3} este simetrică. În calculul deplasării se integrează numai pe jumătate de structură, fiecare termen multiplicându-se cu 2.

$$v_3 = \int \frac{m_{V_3} M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \frac{2}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{1600}{EI}$$

- rotirea relativă θ_3^{rel}

Perechea de momente egale cu unitatea reprezintă o încărcare simetrică și deci diagrama unitară de moment încovoietor $m_{\theta_3^{rel}}$ este simetrică.

$$\theta_3^{rel} = \int \frac{m_{\theta_3^{rel}} M}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) - \frac{2}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 4 \cdot 1 \right] = \frac{-960}{EI}$$

Din analiza rezultatelor obținute în calculul deplasărilor se desprind următoarele concluzii:

- rezultatul integrării a două diagrame simetrice este diferit de zero,
- rezultatul integrării unei diagrame simetrice cu o diagramă antisimetrică este egal cu zero,
- deformata unei structuri simetrice, încărcată simetric, este simetrică. Secțiunea de pe axa de simetrie se poate translata numai pe direcția axei de simetrie.

2.3.2.2. Cadre simetrice încărcate antisimetric

Exemplul 2.12 Fie cadrul din figura 2.21 încărcat antisimetric. Se cere să se traseze diagramele de eforturi și să se calculeze deplasările secțiunii din axa de simetrie.

Calculul reacțiunilor

$$\begin{array}{llll} \sum M_1 = 0 & 60 \cdot 3 + 60 \cdot 3 - V_5 \cdot 8 = 0 & V_5 = 45 \text{ kN} \\ \sum M_5 = 0 & -V_1 \cdot 8 + 60 \cdot 3 + 60 \cdot 3 = 0 & V_1 = 45 \text{ kN} \\ \sum M_3^{st} = 0 & -45 \cdot 4 + H_1 \cdot 3 = 0 & H_1 = 60 \text{ kN} \\ \sum M_3^{dr} = 0 & -45 \cdot 4 + H_5 \cdot 3 = 0 & H_5 = 60 \text{ kN} \end{array}$$

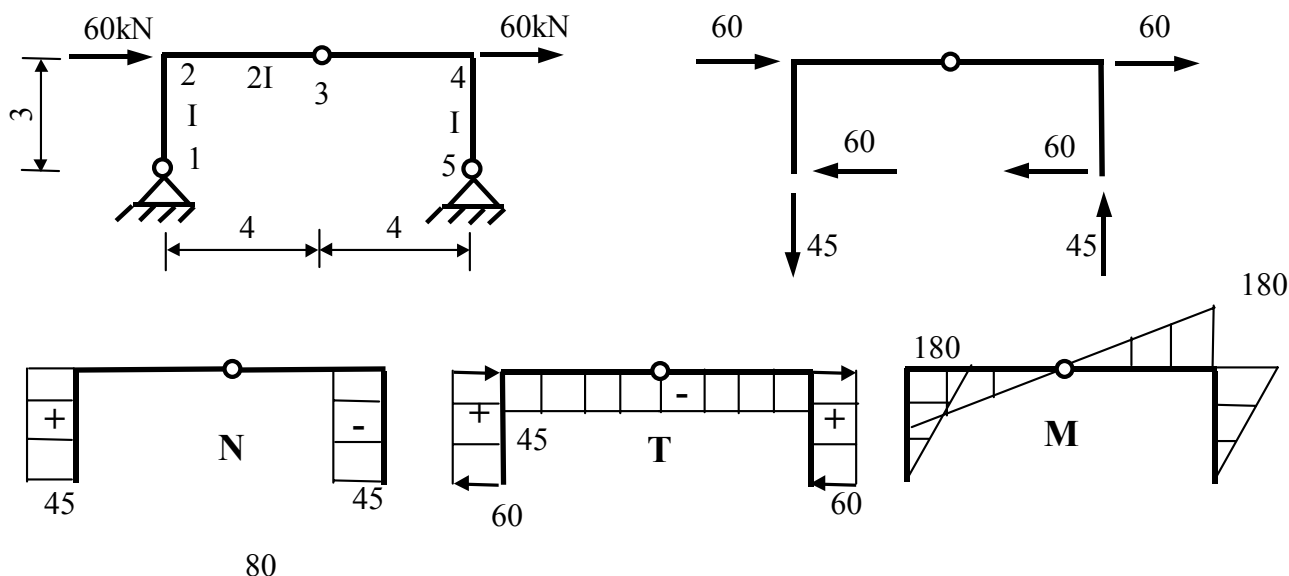


Fig. 2.21

Din calculul efectuat rezultă că la cadrele simetrice încărcate antisimetric, **reacțiunile sunt antisimetrice.**

Diagramele de eforturi

$$N_{12} = 45 \text{ kN}$$

$$N_{45} = -45 \text{ kN}$$

$$T_{12} = 60 \text{ kN}$$

$$T_{24} = -45 \text{ kN}$$

$$T_{45} = 60 \text{ kN}$$

$$M_2 = +60 \cdot 3 = 180 \text{ kNm}$$

$$M_4 = -60 \cdot 3 = -180 \text{ kNm}$$

Din analiza diagramelor de eforturi rezultă următoarele *concluzii*:

- ***la structurile simetrice, încărcate antisimetric, diagramele de forță axială și de moment încovoietor sunt antisimetrice, iar diagrama de forță tăietoare este simetrică.***

Calculul deplasărilor secțiunii 3 (din axa de simetrie)

Diagramele unitare sunt aceleași de la exemplul precedent (fig. 2.20).

- deplasarea pe orizontală u_3

$$u_3 = \int \frac{m_{u_3} M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) + \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{900}{EI}$$

- deplasarea pe verticală v_3

Deoarece diagrama unitară este simetrică, iar diagrama M este antisimetrică, rezultă

$$v_3 = 0$$

- rotirea relativă θ_3^{rel}

În mod analog
 $\theta_3^{rel} = 0$

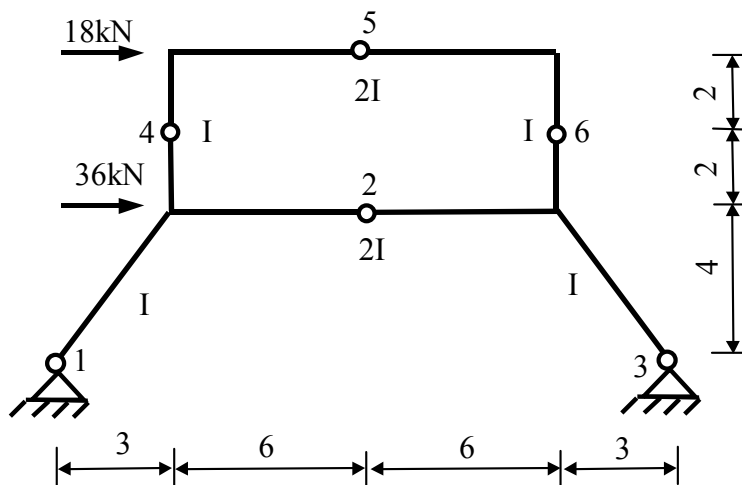
Din analiza rezultatelor obținute în calculul deplasărilor se desprind următoarele concluzii:

- rezultatul integrării a două diagrame antisimetrice este diferit de zero,
- deformată unei structuri simetrice, încărcată antisimetric, este antisimetrică.

Secțiunea din axa de simetrie se poate translața numai pe normala la această axă.

Exemplul 2.13. Pentru structura din figura 2.22 să se traseze diagramele N,T,M și să se calculeze deplasarea pe orizontală a secțiunii 5.

Fig. 2.22



Structura este un cadru compus format dintr-o parte principală 1-2-3 și o parte secundară 4-5-6. Cadrul este încărcat cu o încărcare oarecare. Încărcarea dată se descompune într-o încărcare simetrică și o încărcare antisimetrică. Calculul începe cu partea secundară și se trece la partea principală.

a) *încărcarea simetrică.* Se constată că încărcarea simetrică produce numai eforturi axiale în rigle (N_s), eforturi de compresiune (fig. 2.23).

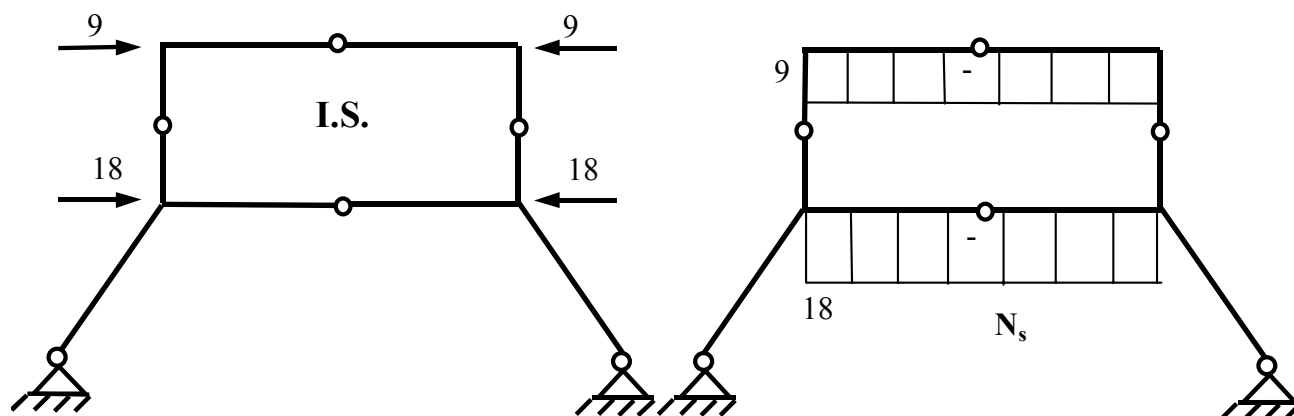


Fig. 2.23

b) *încărcarea antisimetrică*. Din încărcarea antisimetrică apar toate tipurile de eforturi N_{as} , T_{as} , M_{as} (fig. 2.24).

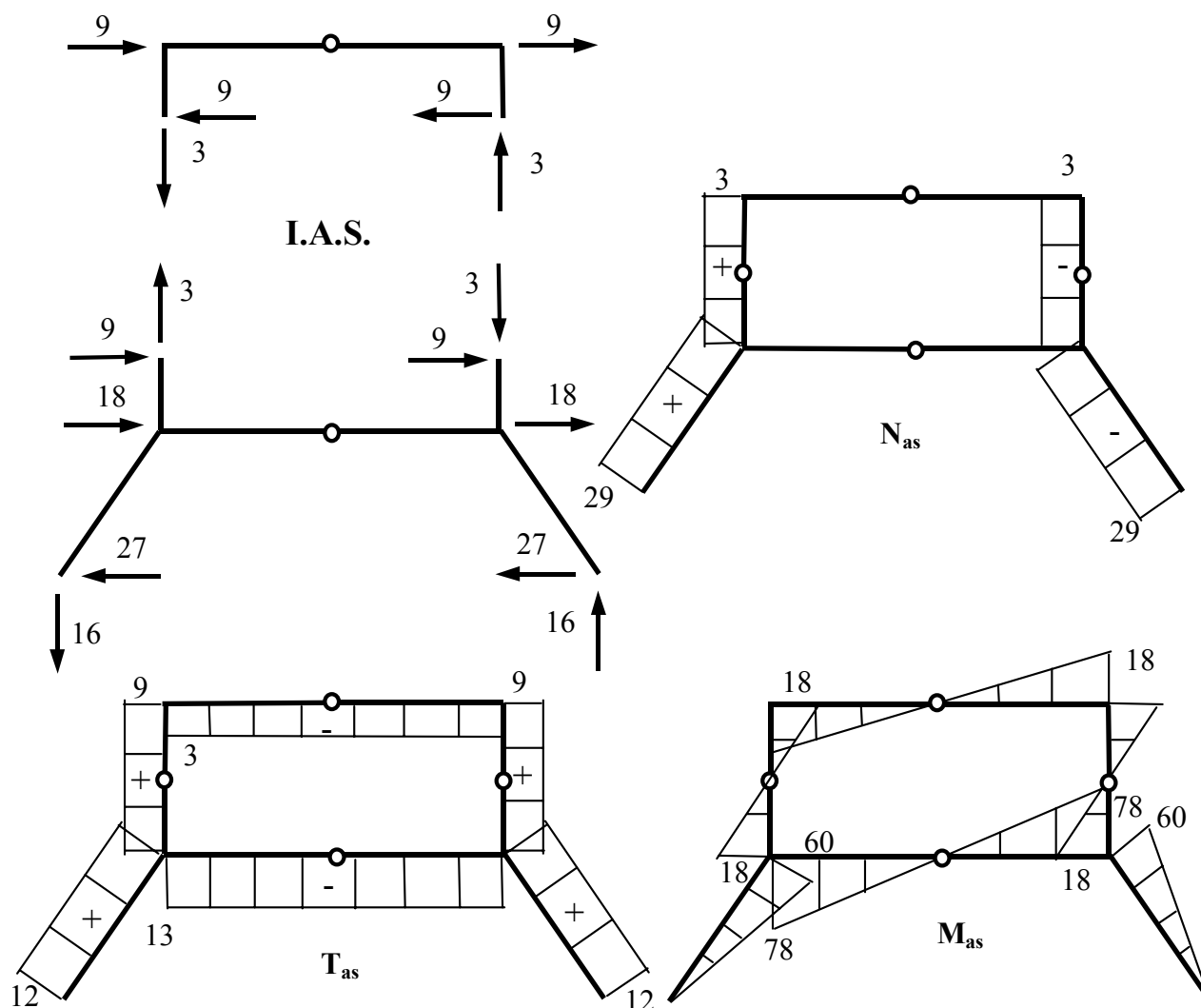


Fig. 2.24

Diagramele finale se obțin din cele trei diagrame obținute la încărcarea antisimetrică la care se adaugă eforturile axiale din rigle produse de încărcarea simetrică.

Pentru calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 5 se încarcă structura cu o forță orizontală egală cu unitatea și se trasează diagrama unitară m_5 (fig. 2.25). Deplasarea pe orizontală a secțiunii 5 se determină utilizând regula lui Vereșciaghin (diagramele M_{as} și m_5 sunt antisimetrice)

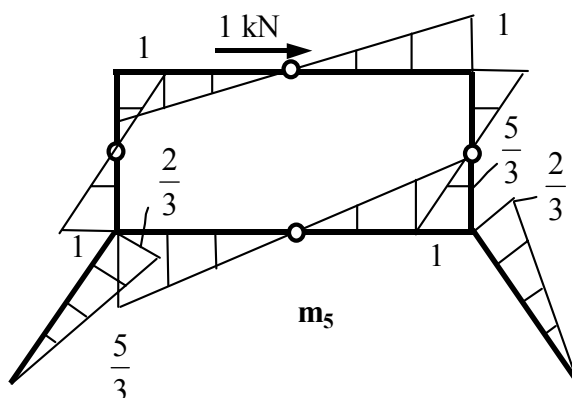


Fig. 2.25

$$u_5 = \int \frac{M_{as} m_5}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{2}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{2}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 78 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \right) = \frac{477,33}{EI} \text{ m}$$

2.4. ACȚIUNEA VARIAȚIILOR DE TEMPERATURĂ ȘI A CEDĂRIILOR DE REAZEME ASUPRA STRUCTURILOR STATIC DETERMINATE FORMATE DIN BARE DREPTE

Așa cum am prezentat în capitolul 1, acțiunea variației de temperatură și a cedărilor de reazeme la structuri static determinate produce numai modificarea configurației geometriei structurii fără să introducă eforturi în structură. Acest fapt este prezentat prin intermediul următoarelor două exemple.

Exemplul 2.14 Să se determine deplasarea pe verticală a secțiunii 3 la structura din figura 2.26 produsă de acțiunea variației de temperatură.

Pentru toate barele temperatura medie este $t_m = 5^\circ$, iar diferența de temperatură este $\Delta t = 20 - (-10) = 30^\circ$.

Din încărcarea cu forță egală cu unitatea au rezultat diagramele unitare de forță axială n_3 și de moment încovoiător m_3 .

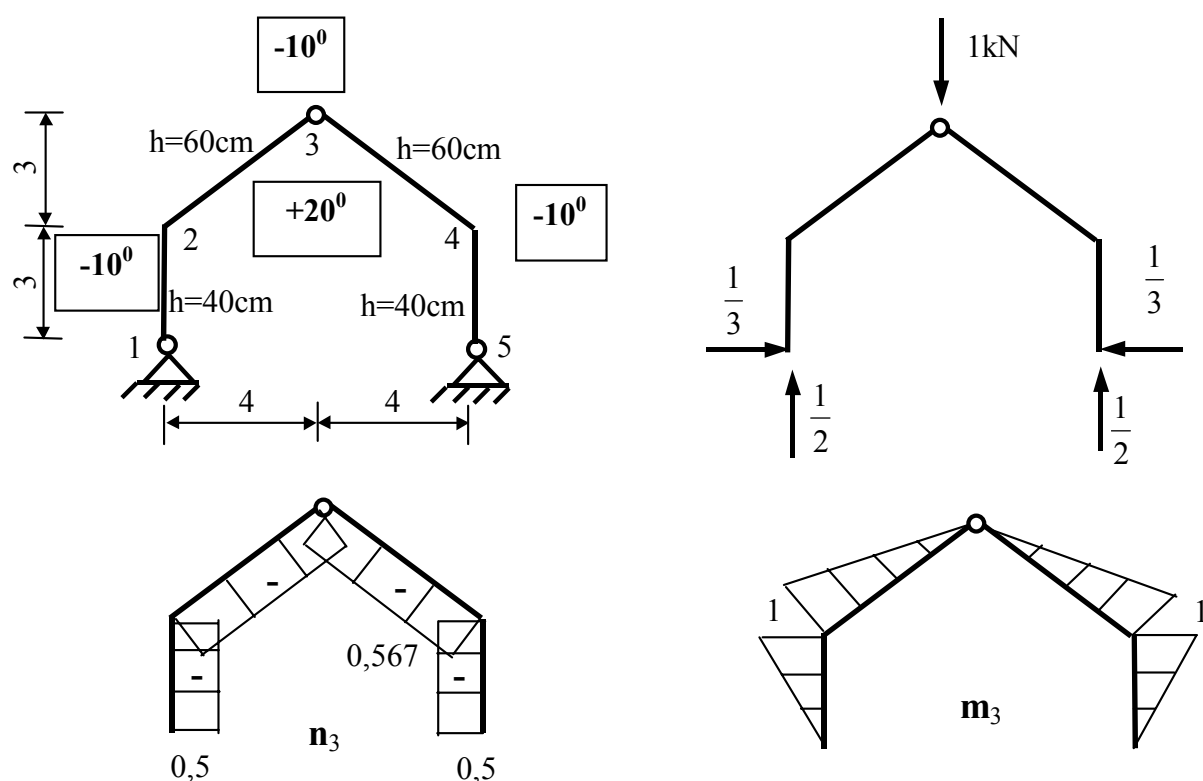


Fig. 2.26

Ținând cont de convenția de semne prezentată în paragraful 1.5.4, valoarea deplasării pe verticală a secțiunii 3 este

$$\begin{aligned}
 v_3 &= \alpha \int n_3 \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int m_3 \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot dx = \\
 &= 2\alpha \left[-0,5 \cdot 3 \cdot 5 - 0,567 \cdot 5 \cdot 5 \right] + 2\alpha \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{30}{0,4} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{30}{0,6} \right] = \\
 &= -43,35\alpha - 475\alpha = -518,35\alpha = -0,00518\text{m} = -5,18\text{mm}
 \end{aligned}$$

Se constată că efectul forței axiale este mult mai mic în comparație cu efectul momentului încovoiător.

Exemplul 2.14. Să se determine deplasarea secțiunii 3 la acțiunea cedărilor de reazeme $\Delta u=2\text{cm}$ și $\Delta v=1\text{cm}$.

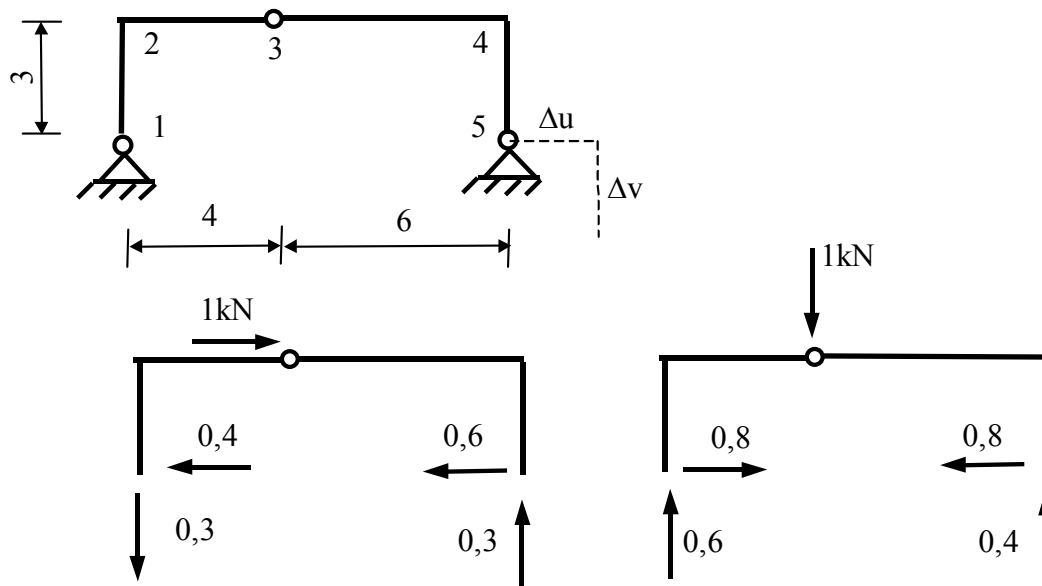


Fig. 2.27

- calculul deplasării u_3 . Se încarcă structura cu forța orizontală egală cu unitatea în secțiunea 3, se calculează reacțiunile. Se observă că numai reacțiunile din reazemul 5 produc lucru mecanic, deci deplasarea u_3 este

$$u_3 = -[-0,6 \cdot 2 - 0,3 \cdot 1] = +1,5\text{cm}$$

- calculul deplasării v_3 . În mod analog se încarcă structura cu forța verticală egală cu unitatea aplicată în secțiunea 3, se calculează reacțiunile și utilizând relația (1.47) se determină deplasarea v_3

$$u_3 = -[-0,8 \cdot 2 - 0,4 \cdot 1] = +2\text{cm}$$

CAPITOLUL III

GRINZI CU ZĂBRELE

3.1. GENERALITĂȚI

Grinzile cu zăbrele reprezintă o categorie de sisteme de bare cu o răspândire mare în practică. Ele sunt utilizate fie sub forma unor sisteme plane, fie sub forma unor sisteme spațiale. Grinzile cu zăbrele se folosesc pentru acoperirea unor suprafețe mari, pentru poduri de deschideri mari, pentru stâlpii rețelelor de înaltă tensiune, antene, macarale. În acest paragraf se vor studia numai grinzile cu zăbrele plane. Schema de calcul a acestor structuri se obține în baza ipotezelor generale ale calculului de ordinul I la care se adaugă următoarele *ipoteze simplificatoare* specifice:

- axele barelor sunt concurente în noduri,
- nodurile se consideră a fi articulații perfecte,
- forțele se aplică, ca forțe concentrate, numai în noduri.

Consecința acestor ipoteze este faptul că în barele acestor structuri apar numai eforturi axiale - de întindere sau de compresiune.

Realizarea practică a grinzilor cu zăbrele nu satisface niciodată ipoteza admisă că barele sunt perfect articulate în noduri. Astfel la grinzile cu zăbrele metalice, prinderea barelor în noduri se realizează prin intermediul unor gusee, grinzile cu zăbrele din beton armat se execută cu noduri rigide, iar la grinzile cu zăbrele din lemn, barele se prind prin chertări, buloane sau eclise. Deci în toate cazurile practice nodurile grinzilor cu zăbrele se realizează ca noduri rigide, ceea ce conduce la apariția momentelor încovoietoare în bare.

Încercările și calculele efectuate pe grinzi cu zăbrele au scos în evidență că dacă dimensiunea mare a secțiunii transversale a barei este mai mică decât $\frac{1}{10}$ din lungimea barei, efectul nodului rigid poate fi considerat ca un efect secundar, în comparație cu eforturile calculate în ipoteza că nodurile sunt perfect articulate. Această concluzie este justificată pentru grinzile cu zăbrele metalice și din lemn. La cele din beton armat trebuie să se țină seama și de momentele încovoietoare care apar ca urmare a rigidității nodului.

Grinzile cu zăbrele se prezintă în forme și alcătuiri foarte variate. La o asemenea structură se deosebesc barele care marginesc structura cu zăbrele numite tălpi, care după poziția lor sunt talpa superioară **S** și talpa inferioară **I**, barele care leagă tălpile între ele numite zăbrele: cele înclinate se numesc diagonale **D** iar cele verticale se numesc montați **M**.

După modul de alcătuire, grinzile cu zăbrele se clasifică în:

-a) *grinzi cu zăbrele simple* (fig.3.1) formate dintr-o succesiune de triunghiuri, fără ca suprafața triunghiulară să se suprapună. Această alcătuire se poate realiza

pornind de la un triunghi de bază, la care se adaugă un nou nod cu ajutorul a două bare. În ceea ce privește forma conturilor, grinzile cu zăbrele simple pot fi:

- cu tălpi paralele (fig. 3.1,a,b,c),
- cu tălpi poligonale (fig. 3.1,d).

După modul de distribuție al zăbrelelor, grinzile cu zăbrele simple pot fi:

- sistem triunghiular (fig. 3.1,a),
- sistem dreptunghiular (fig. 3.1,b),
- cu diagonalele în K (fig. 3.1,c).

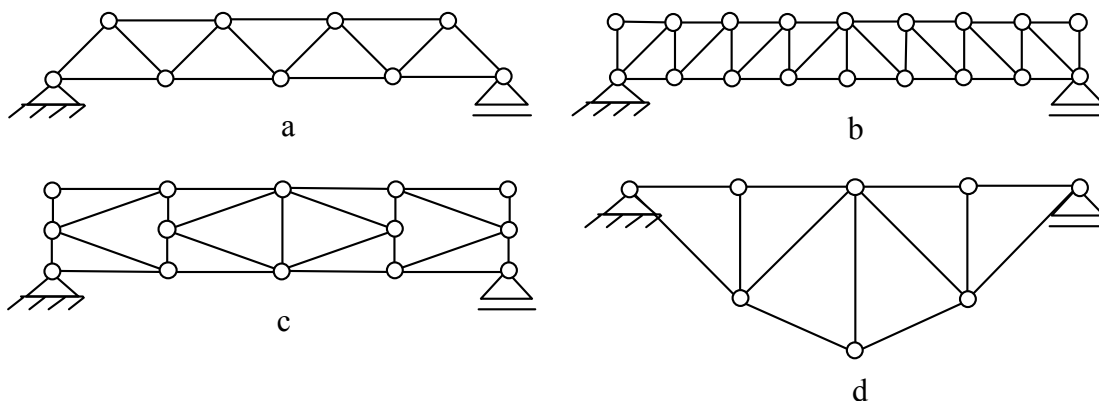


Fig. 3.1

-b) *grinzi cu zăbrele compuse* (fig.3.2,a), alcătuite prin suprapunerea unor sisteme simple astfel încât ansamblul să aibă asigurată invariabilitatea geometrică. Astfel de structuri apar în practică atunci când între noduri trebuie să reazeme elemente transversale sau când este necesară reducerea lungimii de flambaj a barelor comprimate în planul grinzii,

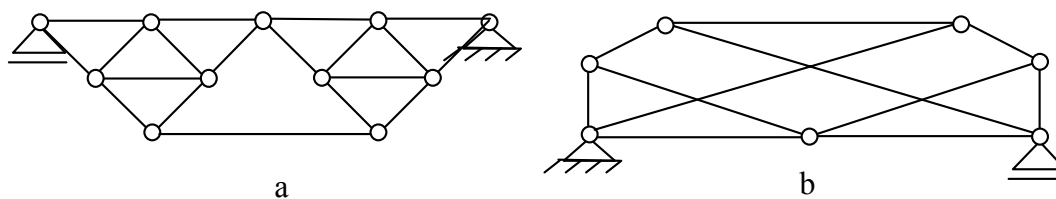


Fig. 3.2

-c) *grinzi cu zăbrele complexe* (fig. 3.2,b), care se caracterizează prin aceea că din fiecare nod pornesc cel puțin trei bare, iar punctele de intersecție a diagonalelor nu se consideră noduri. Aceste tipuri de grinzi cu zăbrele se folosesc mai rar în practică.

3.2. CONDIȚIA DE INVARIABILITATE GEOMETRICĂ ȘI DE DETERMINARE STATICĂ

Analiza alcătuirii constructive a grinzilor cu zăbrele, în ipoteza nodurilor articulate, necesită verificarea asigurării invariabilității geometrice a structurii. Invariabilitatea geometrică constă, în ipoteza lungimii invariabile a barelor, în faptul că fiecare nod trebuie să aibă poziție fixă în raport cu celelalte noduri.

Grinzile cu zăbrele pot avea invariabilitate geometrică asigurată independent de baza de susținere sau împreună cu baza de susținere.

Cea mai simplă construcție cu noduri articulate care are invariabilitate geometrică asigurată este triunghiul (fig.3.3).

De două noduri ale triunghiului se mai poate fixa, prin intermediul a două bare articulate, încă un nod. Deci pentru fiecare nod nou, în afara primelor trei, sunt necesare câte 2 bare.

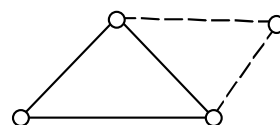


Fig.3.3

Pornind de la această constatare, se poate determina relația care stabilește condiția de invariabilitate geometrică proprie a grinzii cu zăbrele, respectiv

$$b - 2n + 3 = 0 \quad (3.1)$$

Pentru fixarea grinzii cu zăbrele mai este necesar un număr de minimum 3 legături exterioare. Deci condiția de invariabilitate geometrică împreună cu legăturile cu baza de susținere are forma

$$b + r - 2n = 0 \quad (3.2)$$

Condiția (3.2) reprezintă și condiția de determinare statică

$$N = b + r - 2n = 0 \quad (3.3)$$

deoarece numărul de necunoscute este egal cu numărul eforturilor din cele b bare și reacțiunile din cele r legături simple cu baza de susținere, iar numărul de ecuații de echilibru static este egal cu de două ori numărul nodurilor, deoarece pentru un nod se pot scrie două ecuații de echilibru static respectiv, $\sum X_i = 0$ și $\sum Y_i = 0$.

Grinzile cu zăbrele din figurile 3.1-3.2 examinate din punct de vedere al invariabilității geometrice conduc la următoarele concluzii:

fig.3.1,a $b=15, n=9, N = b - 2n + 3 = 15 - 2 \cdot 9 + 3 = 0$

fig.3.1,b $b=33, n=18, N = b - 2n + 3 = 33 - 2 \cdot 18 + 3 = 0$

fig.3.1,c $b=25, n=14, N = b - 2n + 3 = 25 - 2 \cdot 14 + 3 = 0$

fig.3.1,d $b=13, n=8, N = b - 2n + 3 = 13 - 2 \cdot 8 + 3 = 0$

fig.3.2,a $b=19, n=11, N = b - 2n + 3 = 19 - 2 \cdot 11 + 3 = 0$

fig.3.2,b $b=11, n=7, N = b - 2n + 3 = 11 - 2 \cdot 7 + 4 = 0$

Pentru toate cazurile rezultă invariabilitate geometrică proprie. Exemple de structuri având invariabilitate geometrică împreună cu legăturile sunt prezentate în figura 3.4.

Grinda cu zăbrele din fig. 3.4,a are $b=22$, $N=13$ și aplicând relația (3.1) se observă că structura fără legăturile exterioare din rezemări nu are invariabilitate geometrică proprie asigurată, panoul 9-10-12-13 rotindu-se în jurul articulației 9.

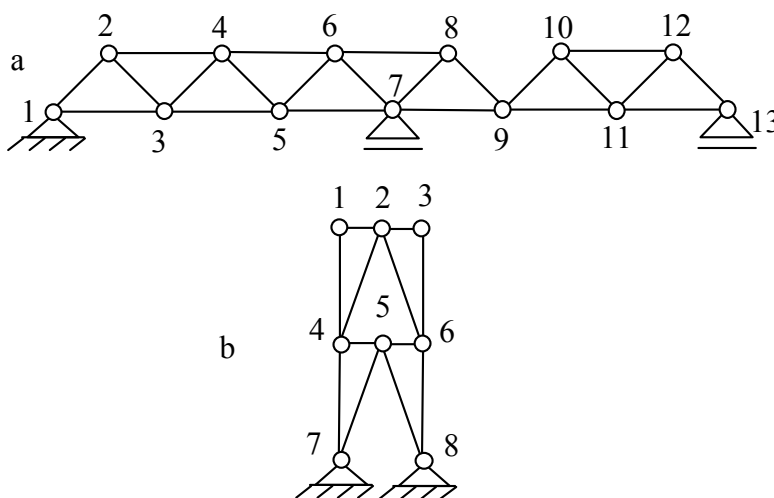


Fig. 3.4

Dacă se verifică relația (3.2) în care $r=4$, rezultă că împreună cu legăturile exterioare grinda cu zăbrele are invariabilitatea geometrică asigurată.

Grinda cu zăbrele din fig. 3.4,b pentru care $b=12$, $N=8$ și $r=4$ este invariabilă geometric împreună cu legăturile

3.3. METODE PENTRU DETERMINAREA EFORTURILOR DIN BARE

Pentru calculul eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele se pot utiliza următoarele metode:

- metoda izolării nodurilor,
- metoda secțiunilor simple,
- metoda secțiunilor duble,
- metoda înlocuirii barei.

Primele două metode se utilizează în cazul grinzilor cu zăbrele simple și compuse, iar celelalte două pentru rezolvarea grinzilor cu zăbrele complexe. Deoarece marea majoritate a grinzilor cu zăbrele întâlnite în practică sunt fie simple fie compuse, se prezintă numai primele două metode de determinare a eforturilor din bare.

3.3.1. Metoda izolării nodurilor

În această metodă se consideră izolat fiecare nod al grinzii cu zăbrele prin secționarea tuturor barelor care concură în nod. În locul barelor secționate se introduc

eforturile axiale considerate de întindere. Asupra fiecărui nod acționează un sistem de forțe concurente format din forțele exterioare (acțiuni directe și reacțiuni) și din forțele axiale necunoscute din barele secționate. Condiția de echilibru static pentru fiecare nod permite scrierea a două ecuații de proiecții, iar pentru o grindă cu zăbrele cu n noduri se pot scrie $2n$ ecuații, din care se determină eforturile necunoscute și reacțiunile. În practică, metoda izolării nodurilor nu se folosește sub această formă deoarece conduce la un calcul laborios.

Evitarea rezolvării sistemului de $2n$ necunoscute se face calculând mai întâi reacțiunile, utilizând fie numai ecuațiile de echilibru ale ansamblului, în cazul în care grinda cu zăbrele este simplu rezemată (fig. 3.1-3.2), fie atât ecuațiile de echilibru ale ansamblului cât și ecuațiile de echilibru ale părților componente în cazul în care grinda cu zăbrele are forma celei prezentate în figura 3.4,a. În continuare se stabilește ordinea în care se scriu ecuațiile de echilibru ale nodurilor astfel încât să se obțină numai 2 necunoscute în fiecare nod. Rezolvarea începe cu nodul în care concură numai 2 bare de efort necunoscut și apoi, folosind rezultatele obținute, se continuă calculul parcurgând nodurile în așa fel încât să rezulte de fiecare dată maximum două eforturi necunoscute.

Trebuie observat că la penultimul nod se mai poate determina o singură necunoscută, iar ultimul nod este un nod de verificare a calculelor. Acest fapt reprezintă un dezavantaj, deoarece o eroare de calcul la un moment dat este pusă în evidență doar prin calculul ultimului nod.

Pentru o ipoteză oarecare de încărcare există posibilitatea de a avea bare de efort nul. Situațiile particulare în care se găsesc eforturi nule în barele grinzii cu zăbrele sunt următoarele:

- un nod format din două bare de direcții diferite și nodul este neîncărcat. Efortul este nul în fiecare bară (fig. 3.5,a);
- un nod format din trei bare, două bare având aceeași direcție iar nodul este neîncărcat. Efortul din cea de-a treia bară este nul (fig. 3.5,b)

În practică se utilizează pentru a reprezenta eforturile axiale, convenția de semne din figura 3.5,c pentru barele întinse și din figura 3.5,d pentru barele comprimate.

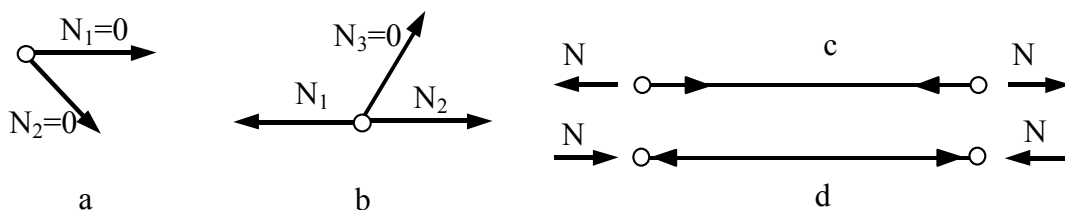


Fig. 3.5

3.3.2. Metoda secțiunilor simple

În această metodă se secționează structura și se scriu ecuații de echilibru pentru una din cele două substructuri rezultate. Deoarece în plan se pot scrie 3 ecuații de echilibru static, înseamnă că secțiunea efectuată prin structură trebuie să taie maximum trei bare, ca acestea să poată fi determinate.

Înainte de aplicarea metodei trebuie determinate reacțiunile, astfel încât în secțiunea efectuată să apară ca necunoscute numai eforturile din cele trei bare. Cele trei bare nu trebuie să fie toate concurente într-un punct sau paralele, deoarece în acest caz nu se asigură legarea invariabilă a celor două porțiuni.

Scrierea ecuațiilor de echilibru static pentru porțiunea izolată din grinda cu zăbrele trebuie făcută astfel încât să conducă la ecuații cât mai simple. Pentru simplificarea calculelor este indicat ca fiecare ecuație să conțină numai o necunoscută și în acest scop se scriu următoarele ecuații de echilibru:

- ecuații de momente în raport cu punctele de intersecție a două câte două bare din cele trei bare secționate,
- ecuații de momente pentru calculul eforturilor din tălpi și ecuație de proiecție după normala la tălpi pentru calcul eforturilor din diagonală sau montan la grinzi cu zăbrele având tălpi paralele.

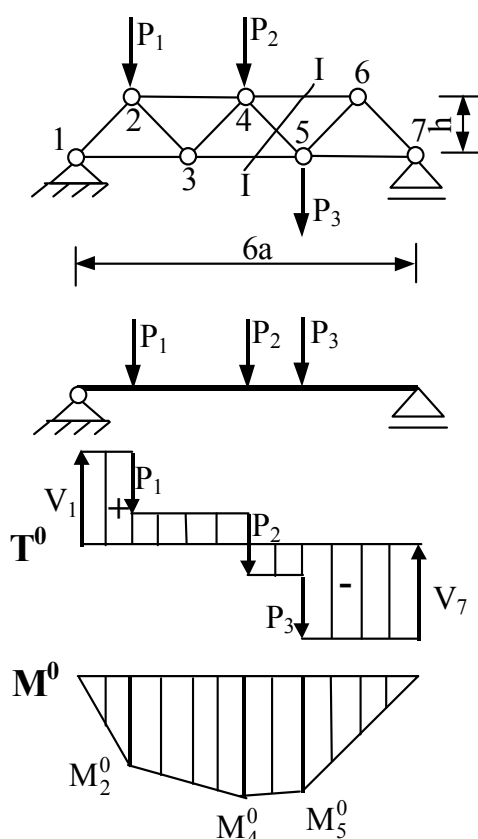
Utilizând această metodă se pot determina eforturile din orice bară a grinzii cu zăbrele fără a cunoaște eforturile din barele alăturate. Astfel, o eroare făcută la calculul unui efort într-o bară oarecare nu influențează celelalte eforturi din barele grinzii cu zăbrele. Acest lucru reprezintă avantajul metodei secțiunilor simple.

3.4. CAZURI PARTICULARE DE GRINZI CU ZĂBRELE

În construcții se folosesc grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele încărcate cu forțe verticale. În acest caz, eforturile din barele grinzilor cu zăbrele se exprimă în funcție de eforturile de la grinda dreaptă cu aceeași deschidere și aceleași forțe ca grinda cu zăbrele. Această sistematizare a calculului eforturilor permite studiul influenței formei și înălțimii grinzilor cu zăbrele asupra mărimii și naturii eforturilor din bare. În continuare se vor analiza două cazuri de alcătuire a grinzilor cu zăbrele având tălpile paralele.

3.4.1. Grinda cu zăbrele cu alcătuire triunghiulară (fig. 3.6)

În figura 3.6 se prezintă grinda simplu rezemată corespunzătoare grinzii cu zăbrele și diagramele de forță tăietoare T^0 și de moment încovoietor M^0 . Pentru determinarea expresiei eforturilor din bare se consideră secțiunea I-I. Utilizând metoda secțiunilor se determină eforturile din bare (S_{46} , D_{45} și I_{35})



Efortul din talpa superioară (S_{46}) se determină dintr-o ecuație de momente în raport cu nodul 5, respectiv

$$\sum M_5 = 0 \quad V_1 \cdot 4a - P_1 \cdot 3a - P_2 \cdot a + S_{46} \cdot h = 0 \quad (3.4)$$

Se observă că primii trei termeni ai ecuației (3.4) reprezintă momentul încovoietor în secțiunea 5 pe grinda simplu rezemată corespunzătoare (M_5^0) astfel că efortul S_{46} este dat de următoarea expresie

$$S_{46} = -\frac{M_5^0}{h} \quad (3.5)$$

Semnul fiind minus, iar momentul încovoietor este pozitiv, rezultă că efortul S_{46} este efort de compresiune.

Efortul din talpa inferioară (I_{35}) se determină dintr-o ecuație de momente în raport cu nodul 4, respectiv,

$$\sum M_4 = 0 \quad V_1 \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - I_{35} \cdot h = 0 \quad (3.6)$$

Fig. 3.6

Se observă că primii 2 termeni ai ecuației (3.6) reprezintă momentul încovoietor în secțiunea 4 pe grinda simplu rezemată, astfel că efortul I_{35} este dat de următoarea expresie

$$I_{35} = \frac{M_4^0}{h} \quad (3.7)$$

Deoarece momentul încovoietor este pozitiv, rezultă că efortul I_{35} este efort de întindere.

Pentru calculul efortului din diagonală D_{45} se scrie o ecuație de proiecție pe verticală, respectiv

$$\sum Y_i = 0 \quad V_1 - P_1 - P_2 - D_{45} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (3.8)$$

Se observă că primii 3 termeni reprezintă forța tăietoare pe grinda simplu rezemată pe intervalul 4-5, deci, efortul D_{45} are următoarea expresie

$$D_{45} = \frac{T_{45}^0}{\sin \alpha} \quad (3.9)$$

Dacă diagonalele sunt descendente, atunci semnul efortului este același ca și cel al forței tăietoare de pe intervalul respectiv, iar dacă diagonalele sunt ascendente, semnul este invers celui al forței tăietoare de pe intervalul respectiv.

Expresiile (3.5), (3.7) și (3.9) permit calculul eforturilor în barele grinzii cu zăbrele.

3.4.2. Grinda cu zăbrele cu alcătuire dreptunghiulară (fig. 3.7)

Pentru stabilirea expresiilor eforturilor din talpa superioară, talpa inferioară și diagonală se consideră secțiunea I-I, iar pentru efortul din montant secțiunea II-II.

Efortul din talpa superioară S_{46} se determină dintr-o ecuație de momente în raport cu nodul 5

$$\sum M_5 = 0 \quad V_1 \cdot 2a - P_1 \cdot a + S_{46} \cdot h = 0 \quad (3.10)$$

de unde

$$S_{46} = -\frac{M_5^0}{h} \quad (3.11)$$

și este efort de compresiune.

Efortul din talpa inferioară I_{57} se determină dintr-o ecuație de momente în raport cu nodul 6

$$\sum M_6 = 0 \quad V_1 \cdot 4a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - I_{57} \cdot h = 0 \quad (3.12)$$

de unde

$$I_{57} = \frac{M_6^0}{h} \quad (3.13)$$

și este efort de întindere.

Efortul din diagonală D_{56} se determină dintr-o ecuație de proiecții pe verticală

$$\sum Y_i = 0 \quad V_1 - P_1 - P_2 + D_{56} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (3.14)$$

de unde

$$D_{56} = -\frac{T_{56}^0}{\sin \alpha} \quad (3.15)$$

Fig. 3.7

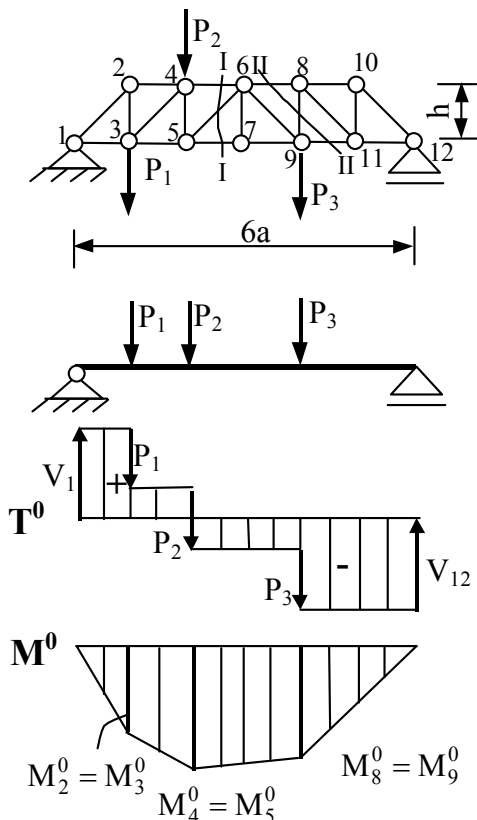
Pentru efortul din montant se consideră secțiunea II-II și se scrie o ecuație de proiecții pe verticală, respectiv

$$\sum Y_i = 0 \quad V_1 - P_1 - P_2 - P_3 + M_{89} = 0 \quad (3.16)$$

de unde

$$M_{89} = -T_{89}^0 \quad (3.17)$$

De remarcat faptul că pentru a exprima efortul din montant este necesar să se precizeze pe care tălpi sunt aplicate încărcările.



3.5. CALCULUL DEPLASĂRILOR ELASTICE LA GRINZI CU ZĂBRELE

În cazul grinzilor cu zăbrele în bare apar numai eforturi axiale, astfel că deplasarea elastică produsă de forțe se calculează luând în considerare, din formula Maxwell-Mohr, numai influența forțelor axiale, respectiv

$$\Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx \quad (3.18)$$

Deoarece barele grinzilor cu zăbrele au secțiunea constantă, iar eforturile sunt constante pe fiecare bară în parte, relația (3.18) devine

$$\Delta_i = \sum_{\text{nr de bare}} \frac{n_i N}{EA} \cdot L \quad (3.19)$$

Determinarea unei deplasări elastice necesită calculul eforturilor n_i din toate barele grinzii cu zăbrele produse de forța $P_i=1$ aplicată în nodul în care se calculează deplasarea și pe direcția deplasării (fig. 3.8,a,b) deoarece eforturile N din barele structurii produse de forțele exterioare reale sunt totdeauna calculate. Deplasarea se obține însumând pe toate barele grinzii cu zăbrele produsele $\frac{n_i N L}{EA}$ care diferă de la bară la bară.

Pe lângă calculul deplasărilor nodurilor grinzilor cu zăbrele se mai pot determina și rotațiile barelor. În acest caz se încarcă grinda cu zăbrele cu un cuplu al cărui moment este egal cu unitatea (fig. 3.8,c).

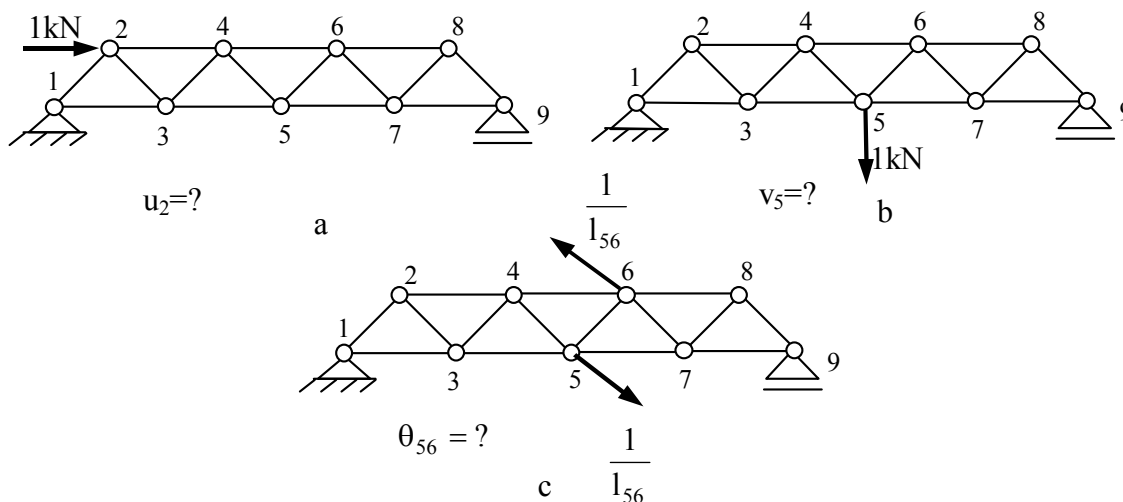


Fig.3.8

În cazul acțiunii variației de temperatură, deplasările elastice se determină pornind de la relația (1.40) la care numai temperatura medie produce modificarea lungimii barelor,

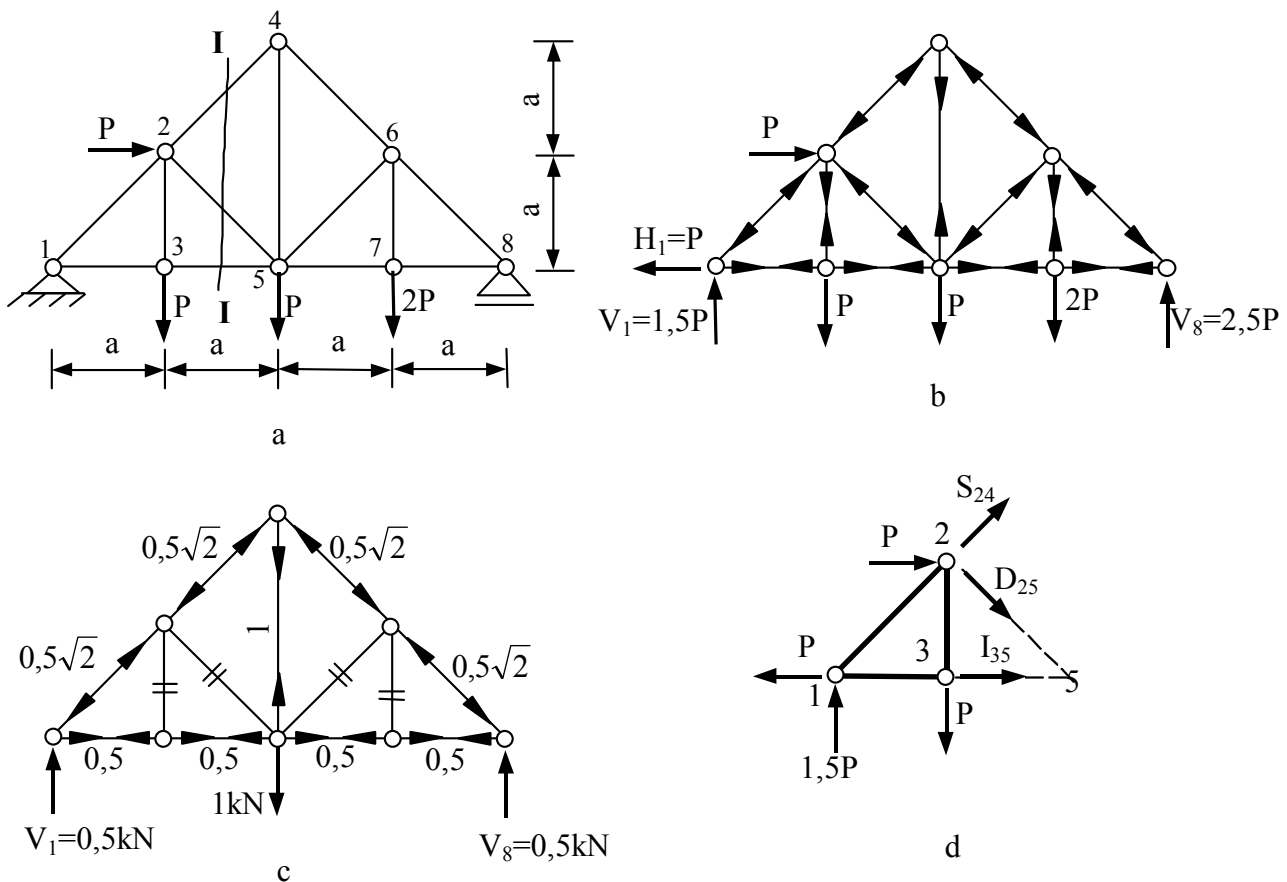
$$\Delta_i = \int n_i du_t \quad (3.20)$$

Ținând cont de expresia alungirii barei ($du_t = \alpha \cdot t_m \cdot dx$) și de faptul că t_m este de obicei aceeași pentru întreaga grindă cu zăbrele, rezultă

$$\Delta_i = \alpha \cdot t_m \cdot \sum (n_i \cdot L) \quad (3.21)$$

Exemplul 3.1. Pentru grinda cu zăbrele din figura 3.9,a să se determine eforturile din bare folosind metoda izolării modurilor și să se verifice eforturile din secțiunea I-I cu ajutorul metodei secțiunilor. Să se calculeze deplasarea pe verticală a nodului 5 considerând secțiunile transversale ale tălpilor 2A iar pentru diagonale și montanți A.

Fig. 3.9

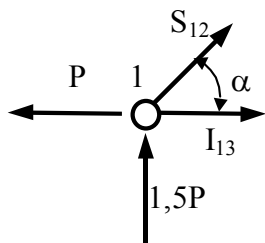


Calculul reacțiunilor

$$\begin{array}{lll} \sum X = 0 & P - H_1 = 0 & H_1 = P \\ \sum M_1 = 0 & P \cdot a + P \cdot a + P \cdot 2a + 2P \cdot 3a - V_8 \cdot 4a = 0 & V_8 = 2,5P \\ \sum M_8 = 0 & V_1 \cdot 4a + P \cdot a - P \cdot 3a - P \cdot 2a - 2P \cdot a = 0 & V_1 = 1,5 \end{array}$$

Calculul eforturilor din bare prin metoda izolării nodurilor

Se izolează nodul 1 format din 2 bare de efort necunoscut și se scriu ecuațiile de echilibru static



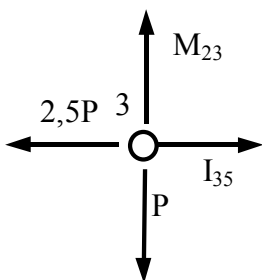
$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 & -P + I_{13} + S_{12} \cos \alpha &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & 1,5P + S_{12} \sin \alpha &= 0\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}S_{12} &= -1,5P\sqrt{2} \text{ (compresiune)} \\ I_{13} &= 2,5P \text{ (întindere)}\end{aligned}$$

Sensul real al eforturilor este trecut pe schema de calcul din figura 3.9,b

Următorul nod format din două bare de efort necunoscut este nodul 3.



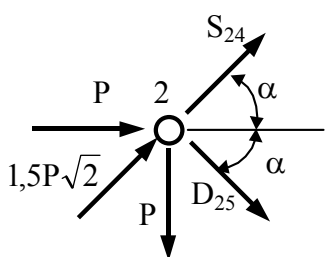
Ecuatiile de echilibru static sunt

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 & -2,5P + I_{35} &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & M_{23} - P &= 0\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}I_{35} &= 2,5P \text{ (întindere)} \\ M_{23} &= P \text{ (întindere)}\end{aligned}$$

Se trece la nodul 2, pentru care ecuațiile de echilibru static sunt

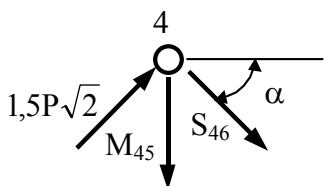


$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 & P + 1,5P\sqrt{2} \cos \alpha + S_{24} \cos \alpha + D_{25} \cos \alpha &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & -P + 1,5P\sqrt{2} \sin \alpha + S_{24} \sin \alpha - D_{25} \sin \alpha &= 0\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}S_{24} &= -1,5P\sqrt{2} \text{ (compresiune)} \\ D_{25} &= -P\sqrt{2} \text{ (compresiune)}\end{aligned}$$

Urmează nodul 4, la care ecuațiile de echilibru static sunt

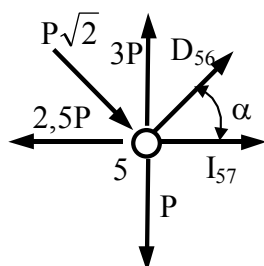


$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 & 1,5P\sqrt{2} \cos \alpha + S_{46} \cos \alpha &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & 1,5P\sqrt{2} \sin \alpha + S_{46} \sin \alpha - M_{45} &= 0\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}S_{46} &= -1,5P\sqrt{2} \text{ (compresiune)} \\ M_{45} &= 3P \text{ (întindere)}\end{aligned}$$

Pentru nodul 5 ecuațiile de echilibru static sunt



$$\sum X_i = 0 \quad -2,5P + P\sqrt{2} \cos \alpha + D_{56} \cos \alpha + I_{57} = 0$$

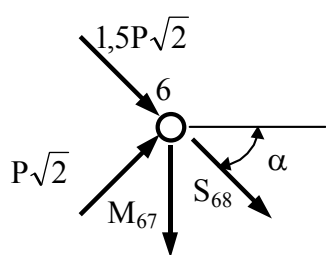
$$\sum Y_i = 0 \quad -P + 3P - P\sqrt{2} \sin \alpha + D_{56} \sin \alpha = 0$$

de unde rezultă

$$D_{56} = -P\sqrt{2} \text{ (compresiune)}$$

$$I_{57} = 2,5P \text{ (întindere)}$$

Urmează nodul 6 pentru care ecuațiile de echilibru static sunt



$$\sum X_i = 0 \quad 1,5P\sqrt{2} \cos \alpha + P\sqrt{2} \cos \alpha + S_{68} \cos \alpha = 0$$

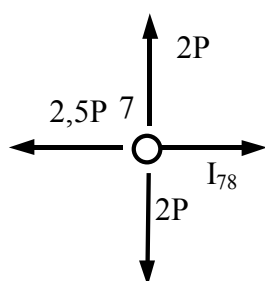
$$\sum Y_i = 0 \quad -1,5P\sqrt{2} \sin \alpha + P\sqrt{2} \sin \alpha - S_{68} \sin \alpha - M_{67} = 0$$

de unde rezultă

$$S_{68} = -2,5P\sqrt{2} \text{ (compresiune)}$$

$$M_{67} = 2P \text{ (întindere)}$$

Pentru nodul 7 cele două ecuații de echilibru static cuprind o singură necunoscută astfel că una dintre ele reprezintă o ecuație de verificare a corectitudinii calculelor



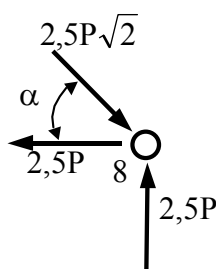
$$\sum Y_i = 0 \quad 2P - 2P = 0$$

$$\sum X_i = 0 \quad -2,5P + I_{78} = 0$$

de unde rezultă

$$I_{78} = 2,5P \text{ (întindere)}$$

Ecuațiile de echilibru static pentru nodul 8 reprezintă ecuații de verificare a calculelor anterioare, respectiv



$$\sum X_i = 0 \quad -2,5P + 2,5P\sqrt{2} \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad 2,5P - 2,5P\sqrt{2} \sin \alpha = 0$$

Calculul eforturilor din bare prin metoda secțiunilor

Pentru determinarea eforturilor din barele intersectate de secțiunea I-I a fost considerată partea din stânga a secțiunii (fig. 3.9,d).

Din ecuația de momente în raport cu nodul 2 rezultă

$$\sum M_2 = 0 \quad P \cdot a + 1,5P \cdot a - I_{35} \cdot a = 0$$

de unde

$$I_{35} = 2,5P \text{ (întindere)}$$

Din ecuația de momente în raport cu nodul 5 rezultă

$$\sum M_5 = 0 \quad 1,5P \cdot 2a + P \cdot a - P \cdot a + S_{24} \cdot a\sqrt{2} = 0$$

de unde

$$S_{24} = -\frac{3Pa}{a\sqrt{2}} = -1,5P\sqrt{2} \text{ (compresiune)}$$

Din ecuația de momente în raport cu nodul 1 rezultă

$$\sum M_1 = 0 \quad P \cdot a + P \cdot a + D_{25} \cdot a\sqrt{2} = 0$$

de unde

$$D_{25} = -\frac{2Pa}{a\sqrt{2}} = -P\sqrt{2} \text{ (compresiune)}$$

Se constată că au fost obținute aceleași valori ca și prin metoda izolării nodurilor. De asemenea, cele trei eforturi pot fi verificate scriind o ecuație de echilibru pe orizontală, respectiv

$$\sum X_i = 0 \quad -P + P + S_{24}\cos\alpha + D_{25}\cos\alpha + I_{35} = 0$$

Calculul deplasării v_5

Se încarcă grinda cu zabrele cu o forță verticală egală cu unitatea aplicată în nodul 5 și se determină eforturile din bare. Deoarece grinda cu zăbrele este simetrică iar încărcarea unitară este aplicată într-un nod aflat în axa de simetrie, eforturile din bare (n_5) sunt simetrice. Pentru acest caz de încărcare există bare de efort nul. Astfel din izolarea nodurilor 3,2,7 și 6 rezultă eforturi nule în barele 2-3, 2-5, 5-6 și 6-7. Valorile și natura eforturilor sunt prezentate în figura 3.9,c.

Calculul deplasării v_5 este sistematizat în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

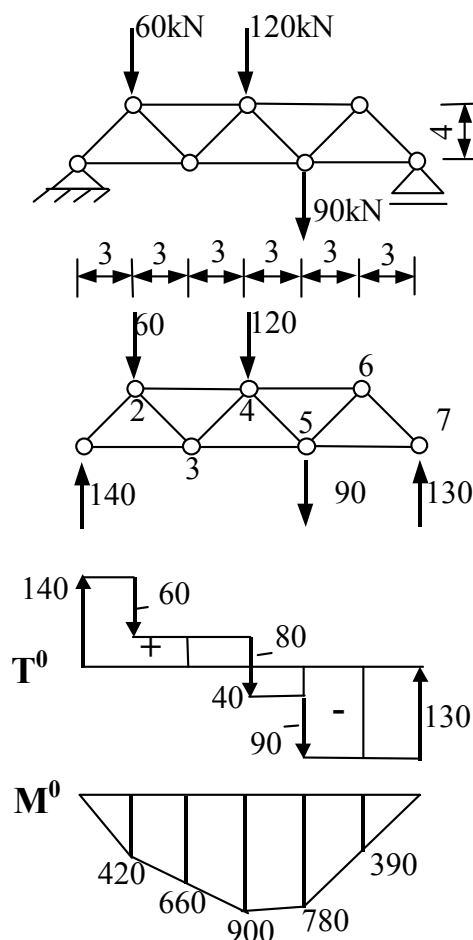
Bara	Aria A	Lungimea L	N	n_5	$\frac{Nn_5L}{EA}$
1-2	2A	$a\sqrt{2}$	$-1,5P\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	$0,75\sqrt{2} Pa/EA$
1-3	2A	a	2,5P	0,5	$0,625Pa/EA$
2-3	A	a	P	0	0
2-4	2A	$a\sqrt{2}$	$-1,5P\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	$0,75\sqrt{2} Pa/EA$
2-5	A	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0
3-5	2A	a	2,5P	0,5	$0,625Pa/EA$

4-5	A	2a	3P	1	6Pa/EA
4-6	2A	$a\sqrt{2}$	$-1,5P\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	$0,75\sqrt{2} \text{ Pa/EA}$
5-6	A	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0
5-7	2A	a	2,5P	0,5	$0,625\text{Pa/EA}$
6-7	A	a	2P	0	0
6-8	2A	$a\sqrt{2}$	$-2,5P\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	$1,25\sqrt{2} \text{ Pa/EA}$
7-8	A	a	2,5P	0,5	$1,25\text{Pa/EA}$

Valoarea deplasării v_5 se obține prin sumarea elementelor de pe ultima coloană, respectiv

$$v_5 = \frac{(9,125 + 3,5\sqrt{2})Pa}{EA}$$

Exemplul 3.2. Fie grinda cu zăbrele din figura 3.10. Să se determine eforturile din bare folosind analogia cu grinda simplu rezemată corespunzătoare



Talpa superioară: $S_{24} = -\frac{M_3^0}{h} = -\frac{660}{4} = -165\text{kN}$

$$S_{46} = -\frac{M_5^0}{h} = -\frac{780}{4} = -195\text{kN}$$

Talpa inferioară: $I_{13} = \frac{M_2^0}{h} = \frac{420}{4} = 105\text{kN}$

$$I_{35} = \frac{M_4^0}{h} = \frac{900}{4} = 225\text{kN}$$

$$I_{57} = \frac{M_6^0}{h} = \frac{390}{4} = 97,5\text{kN}$$

Diagonale ascendente:

$$D_{12} = -\frac{T_{12}^0}{\sin \alpha} = -\frac{140}{0,8} = -175\text{kN}$$

$$D_{34} = -\frac{T_{34}^0}{\sin \alpha} = -\frac{80}{0,8} = -100\text{kN}$$

$$D_{56} = -\frac{T_{56}^0}{\sin \alpha} = -\frac{-130}{0,8} = 162,5\text{kN}$$

Diagonale descendente:

$$D_{23} = \frac{T_{23}^0}{\sin \alpha} = \frac{80}{0,8} = 100\text{kN};$$

$$D_{45} = \frac{T_{45}^0}{\sin \alpha} = \frac{-40}{0,8} = -50\text{kN};$$

$$D_{67} = \frac{T_{67}^0}{\sin \alpha} = \frac{-130}{0,8} = -162,5\text{kN}$$

Fig. 3.10

CAPITOLUL IV

ARCE STATIC DETERMINATE

4.1. GENERALITĂȚI

Arcele sunt bare curbe sau sisteme de bare curbe plane încărcate cu forțe acționând în planul lor. În practică se întâlnesc la baraje, poduri, acoperișurile halelor industriale.

Arcele static determinate pot fi:

- arcul simplu rezemat (fig. 4.1,a),
- arcul cu trei articulații (fig. 4.1,b),
- arcul cu tirant (fig. 4.1,c).

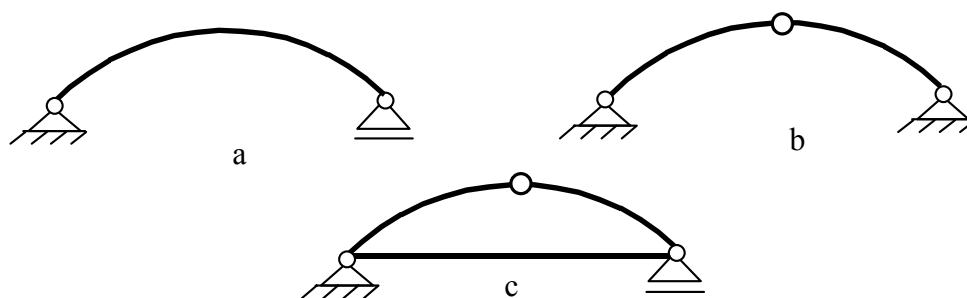


Fig. 4.1

În reazemele arcelor se dezvoltă reacțiuni ale caror componente orizontale se numesc împingeri.

Arcul simplu rezemat nu se întâlnește în practică, el fiind utilizat numai ca instrument de calcul în rezolvarea arcelor static nedeterminate.

Arcul cu trei articulații este cel mai reprezentativ și se utilizează când baza de susținere poate prelua împingerile arcului.

Arcul cu tirant se utilizează când preluarea împingerilor nu se poate realiza în condiții economice, deoarece conduce la dimensiuni exagerate.

În studiul arcelor sunt utilizate următoarele denumiri (fig. 4.2):

- *nașterile arcului* – secțiunile din reazemări de unde pornește arcul,
- *cheia arcului* – secțiunea cea mai depărtată de linia nașterilor. La arcele cu trei articulații, articulația interioară coincide cu cheia arcului.
- *săgeata arcului* (f) – distanța pe verticală de la cheie la linia reazemelor,

- *deschiderea arcului* (L) – distanța dintre reazeme, măsurată pe orizontală,
- *extradosul* - fața exterioară (convexă) a arcului,
- *intradosul* - fața interioară (concavă) a arcului,
- *unghiul* φ format de tangenta la curbă în secțiunea curentă cu orizontala,

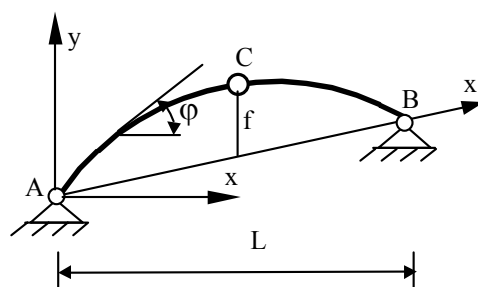


Fig. 4.2

În cazul arcelor eforturile dominante sunt forța axială (de compresiune) și momentul încovoietor.

Arcele pot avea diferite forme, însă cele mai utilizate sunt arcele parabolice și arcele circulare. Forma arcului se poate exprima funcție de caracteristicile sale (deschidere, sgeată) astfel:

-**la arcul parabolic** simetric cu reazemele la același nivel (fig. 4.3), ecuația axei arcului are forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad (4.1)$$

unde a, b și c sunt constante ce urmează a fi determinate din condițiile de dispunere a reazemelor și a punctului de la cheie.

Ținând cont de sistemul de axe atașat arcului, condițiile de determinare a constantelor sunt:

$$x=0; \quad y=0 \text{ (reazemare)}$$

$$x=L; \quad y=0 \text{ (reazemare)} \quad (4.2)$$

$x=L/2; \quad y=f$ (punctul de la cheie se găsește la mijlocul deschiderii)

Aceste condiții conduc la următoarele valori ale constantelor

$$a = -\frac{4f}{L^2}; \quad b = \frac{4f}{L}; \quad c = 0 \quad (4.3)$$

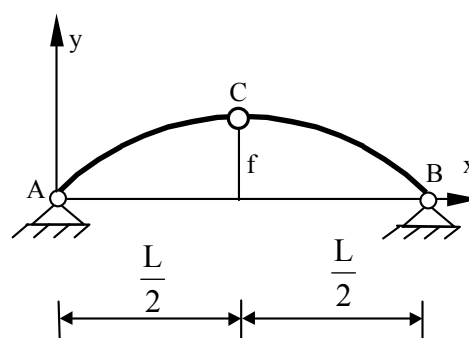


Fig. 4.3

Substituind aceste valori în ecuația (4.1) se obține

$$y = \frac{4fx(L-x)}{L^2} \quad (4.4)$$

Relația (4.4) reprezintă ecuația arcului raportat la sistemul de axe având originea în punctul 1.

Unghiul φ făcut de tangenta la curbă cu orizontala pentru o secțiune oarecare se obține prin derivarea relației (4.4), rezultând

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f(L-2x)}{L^2} \quad (4.5)$$

dacă secțiunea se găsește pe curba ascendentă (A-C) respectiv,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dy}{dx} = \frac{4f(2x-L)}{L^2} \quad (4.6)$$

dacă secțiunea se găsește pe curba descendentă (C-B).

- la **arcul circular** (fig. 4.4), între caracteristicile arcului există următoarea relație

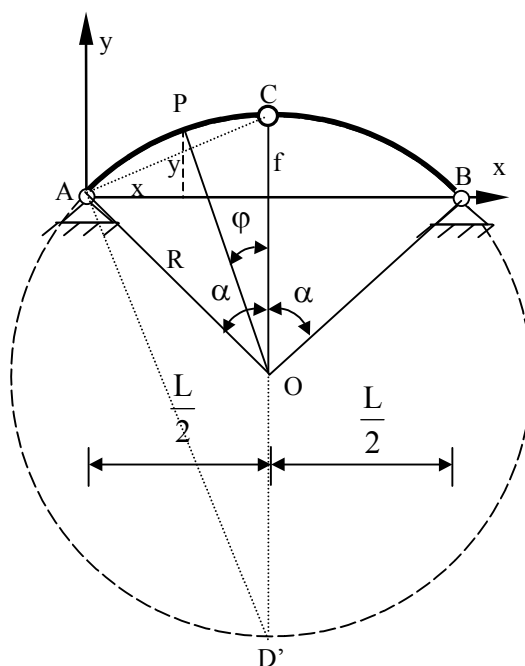


Fig. 4.4

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = f \cdot (2R - f) \quad (4.7)$$

Relația (4.7) reprezintă teorema înălțimii în triunghiul CAD. Coordonatele unui punct oarecare P în raport cu sistemul de axe atașat arcului circular sunt

$$x = \frac{L}{2} - R \sin \varphi \quad (4.8)$$

$$y = R(\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (4.9)$$

Unghiul la centru este dat de relația

$$\sin \alpha = \frac{L}{2R} \quad (4.10)$$

Din relația (4.8) rezultă unghiul secțiunii curente:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{L}{2} - x}{R} \quad (4.11)$$

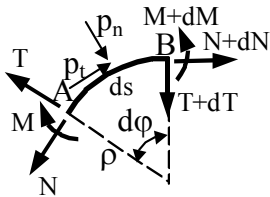
Relația (4.11) conduce la determinarea tangentei la curbă în funcție de poziția punctului P (cunoscut).

4.2. RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE EFORTURI ȘI ÎNCĂRCĂRI LA BARA CURBĂ

Pentru a stabili relația diferențială între eforturi și încărcări se studiază echilibrul static al unui element de arc infinit mic de lungime ds . Asupra elementului de arc acționează o forță uniform distribuită p , care are o componentă normală p_n și o componentă tangențială p_t , și eforturile din secțiunile de la capete (fig. 4.5).

Ecuatia de proiecție pe direcția tangentei la curbă în secțiunea B are forma

$$N + dN - N \cos d\varphi - T \sin d\varphi + p_t \cdot ds \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + p_n \cdot ds \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (4.12)$$



Ecuatia de proiecție după normala la arc în secțiunea B este

$$T + dT - T \cos d\varphi + N \sin d\varphi + p_n \cdot ds \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} - p_t \cdot ds \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

Fig. 4.5

(4.13)

Ecuatia de momente în raport cu centrul de greutate al secțiunii B este

$$\begin{aligned} M - M - dM + T \cdot \rho \cdot \sin d\varphi - N \cdot \rho \cdot (1 - \cos d\varphi) + \\ + p_t \cdot ds \cdot \rho \cdot \left(1 - \cos \frac{d\varphi}{2}\right) - p_n \cdot ds \cdot \rho \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dacă în relațiile (4.12) - (4.14) se ține seama de faptul că unghiul $d\varphi$ este infinit mic, respectiv $\cos d\varphi \approx 1$ și $\sin d\varphi = d\varphi = \frac{ds}{\rho}$ și se neglijează infiniții mici de ordin superior, rezultă

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho} \quad (4.15,a)$$

$$\frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho} \quad (4.15,b)$$

$$\frac{dM}{ds} = T \quad (4.15,c)$$

Analizând relațiile (4.15) pentru forța axială și forța tăietoare se constată că ele sunt mai generale decât cele de la bara dreaptă (vezi relațiile 1.11). Acestea din urmă se pot deduce din relațiile (4.15) considerând raza de curbură a arcului $\rho = \infty$.

4.3. ARCUL CU TREI ARTICULAȚII

Fie arcul cu trei articulații din figura 4.6 încărcat cu un sistem de forțe oarecare. Ca sistem de axe se alege sistemul xoy având originea în punctul A.

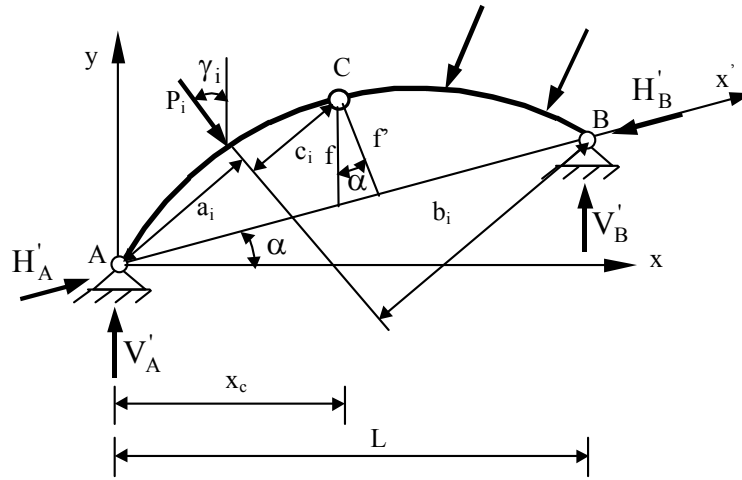


Fig. 4.6

Reacțiunile R_A și R_B din cele două articulații, se descompun în câte o componentă verticală V'_A , respectiv V'_B și o componentă după direcția liniei reazemelor, H'_A respectiv H'_B . O asemenea descompunere are avantajul calcului simplu al componentelor reacțiunii totale din reazem:

$$\sum M_B = 0 \quad V'_A \cdot L - \sum P_i \cdot b_i = 0 \quad V'_A = \frac{\sum P_i \cdot b_i}{L} \quad (4.16)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -V'_B \cdot L + \sum P_i \cdot a_i = 0 \quad V'_B = \frac{\sum P_i \cdot a_i}{L} \quad (4.17)$$

$$\sum M_C^{st} = 0 \quad V'_A \cdot x - \sum P_i \cdot c_i - H'_A \cdot f' = 0 \quad H'_A = \frac{M_C^{0st}}{f'} \quad (4.18)$$

$$\sum X_i = 0 \quad (H'_A - H'_B) \cos \alpha + \sum P_i \sin \gamma_i = 0 \quad H'_B = \frac{H'_A \cos \alpha + \sum P_i \sin \gamma_i}{\cos \alpha} \quad (4.19)$$

unde $M_C^{0st} = V'_A \cdot x - \sum P_i \cdot c_i$

După determinarea reacțiunilor se trece la calculul eforturilor. Forța axială N se obține proiectând forțele de la stânga secțiunii (sau de la dreapta secțiunii) pe direcția tangentei la curbă în secțiunea considerată. Forța tăietoare se obține proiectând aceleași forțe pe normala la tangentă la curbă dusă în secțiunea respectivă.

Expresiile generale pentru eforturile din secțiunea curentă sunt (vezi notațiile din figura 4.7).

$$\begin{aligned} N_x &= -V'_A \sin \varphi - H'_A \cos(\varphi - \alpha) + \sum P_i \sin(\varphi - \gamma_i) \\ T_x &= V'_A \cos \varphi - H'_A \sin(\varphi - \alpha) - \sum P_i \cos(\varphi - \gamma_i) \\ M_x &= V'_A \cdot y - H'_A \cdot y - \sum P_i \cdot d_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

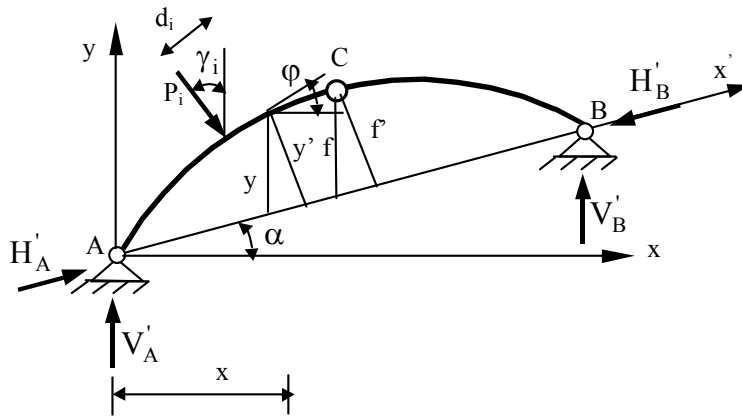


Fig. 4.7

În cazul arcelor cu reazemele la același nivel ($\alpha=0$, $f=f'$, $y'=y$) și încărcate cu forțe verticale ($\gamma_i=0$), expresiile reacțiunilor (4.16-4.19) devin:

$$V'_A = \frac{\sum P_i \cdot b_i}{L} \quad V'_B = \frac{\sum P_i \cdot a_i}{L} \quad H_A = H_B = \frac{M_C^0}{f} = H \quad (4.21)$$

unde a_i și b_i se măsoară pe orizontală, iar M_C^0 reprezintă momentul încovoietor în secțiunea C pe grinda simplu rezemată având aceeași deschidere și aceleași încărcări ca și arcul dat (fig. 4.8).

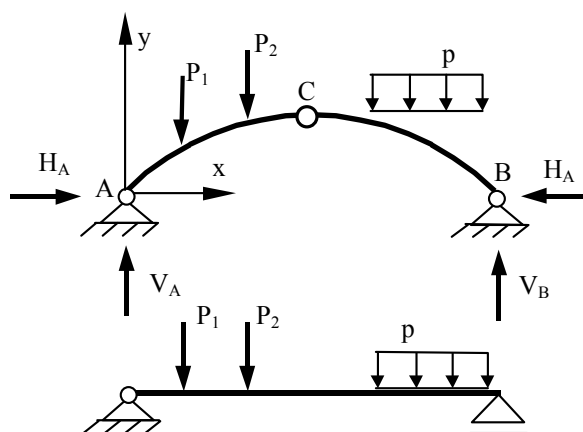


Fig. 4.8

Expresiile (4.20) ale eforturilor devin:

$$\begin{aligned} N_x &= -V_A \sin \varphi - H_A \cos \varphi + \sum P_i \sin \varphi = -T_x^0 \sin \varphi - H \cos \varphi \\ T_x &= V_A \cos \varphi - H_A \sin \varphi - \sum P_i \cos \varphi = T_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \\ M_x &= V_A \cdot x - H_A \cdot y - \sum P_i \cdot d_i = M_x^0 - H \cdot y \end{aligned} \quad (4.22)$$

unde $T_x^0 = V_A - \sum P_i$ și $M_x^0 = V_A \cdot x - \sum P_i \cdot d_i$ reprezintă forța tăietoare, respectiv momentul încovoietor în secțiunea x pe grinda simplu rezemată, iar $\sum P_i$ reprezintă suma forțelor de la stânga secțiunii curente.

Exemplul 4.1 Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială la arcul parabolic din figura 4.9 încărcat cu o forță verticală la cheie. Ecuația arcului este $y = \frac{4fx(L-x)}{L^2}$.

Calculul reacțiunilor verticale

$$\sum M_3 = 0; \quad V_1 \cdot 16 - 90 \cdot 8 = 0 \quad V_1 = 45 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad 90 \cdot 8 - V_3 \cdot 16 = 0 \quad V_3 = 45 \text{ kN}$$

Verificare $\sum Y_i = 0 \quad V_1 - 90 - V_3 = 0$

Calculul reacțiunilor orizontale

$$\sum M_2^{st} = 0 \quad V_1 \cdot 8 - H_1 \cdot 4 = 0 \quad H_1 = 90 \text{ kN}$$

$$\sum M_2^{dr} = 0 \quad -V_3 \cdot 8 - H_3 \cdot 4 = 0 \quad H_3 = 90 \text{ kN}$$

Verificare $\sum X_i = 0 \quad H_1 - H_3 = 0$

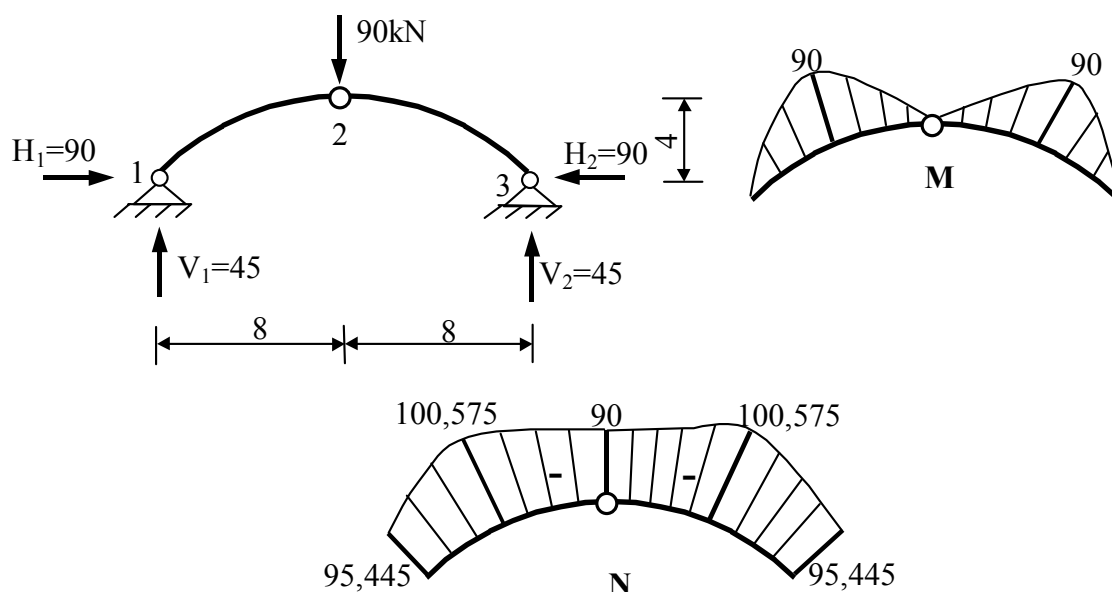


Fig. 4.9

Diagrama de moment încovoietor M se obține calculând momentul încovoietor cu relația specifică acțiunii forțelor verticale, adică

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y$$

unde M_x^0 este diagrama pe grinda simplu rezemată care are aceeași deschidere și aceeași încărcare verticală ca și arcul.

Astfel diagrama de moment încovoietor pe arc rezultă ca diferență între diagrama M_x^0 și diagrama Hy . În ceea ce privește fibra întinsă se observă că dacă $M_x^0 > Hy$, fibra întinsă este fibra de la intrados, iar dacă $M_x^0 < Hy$ fibra întinsă este fibra de la extrados.

Pentru determinarea momentului încovoietor maxim se scrie expresia momentului încovoietor în secțiunea curentă și se pune condiția ca derivata de ordinul întâi să fie egală cu zero, din care rezultă poziția secțiunii în care momentul încovoietor este maxim

$$M_x = V_1 \cdot x - H_1 \cdot y = 45 \cdot x - 90 \cdot y$$

Introducând ecuația arcului în expresia lui M_x rezultă

$$M_x = 45 \cdot x - 90 \cdot \left(x - \frac{x^2}{16} \right)$$

Derivând expresia lui M_x se obține

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x = 45 - 90 + 90 \cdot \frac{x}{8}$$

Din condiția $\frac{dM_x}{dx} = 0$ rezultă $x=4m$

Momentul încovoietor maxim are valoarea

$$M_{\max} = 45 \cdot 4 - 90 \cdot \left(4 - \frac{4^2}{16} \right) = -90 \text{ kNm} \quad (\text{la extrados})$$

Deoarece arcul este simetric, iar încărcarea este simetrică, diagrama de moment încovoietor este simetrică.

Diagrama de forță axială N se obține calculând acest efort în câteva secțiuni caracteristice - la nașteri, la cheie și în secțiunile în care momentul încovoietor are valoarea maximă (în cazul de față la sfertul deschiderii).

În secțiunea 1 forța axială are expresia

$$N_1 = -V_1 \sin \varphi_1 - H_1 \cos \varphi_1$$

unde unghiul φ_1 se obține din ecuația curbei, respectiv

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x)$$

Pentru $x=0$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$ deci $\varphi_1 = 45^\circ$, $\sin \varphi_1 = 0.707$, $\cos \varphi_1 = 0.707$.

Cu aceste date, forța axială N_1 rezultă:

$$N_1 = -45 \cdot 0.707 - 90 \cdot 0.707 = -95.445 \text{ kN}$$

La sfertul deschiderii, forța axială are expresia

$$N_s = -V_1 \sin \varphi_s - H_1 \cos \varphi_s$$

Pentru $x=4$, $\operatorname{tg} \varphi_s = 0.5$ deci $\varphi_s = 26.56^\circ$, $\sin \varphi_s = 0.447$, $\cos \varphi_s = 0.894$

Cu aceste date, forța axială N_s rezultă:

$$N_s = -45 \cdot 0.447 - 90 \cdot 0.894 = -100.575 \text{ kN}$$

Forța axială la cheie are expresia:

$$N_2 = -H_1 = -90 \text{ kN}$$

deoarece $\varphi_2 = 0$, $\sin \varphi_2 = 0$, $\cos \varphi_2 = 1$

Deoarece arcul este simetric, iar încărcarea este simetrică, diagrama de forță axială este simetrică.

Exemplul 4.2 Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială la arcul parabolic din figura 4.10.

Ecuația arcului este $y = \frac{4fx(L-x)}{L^2}$.

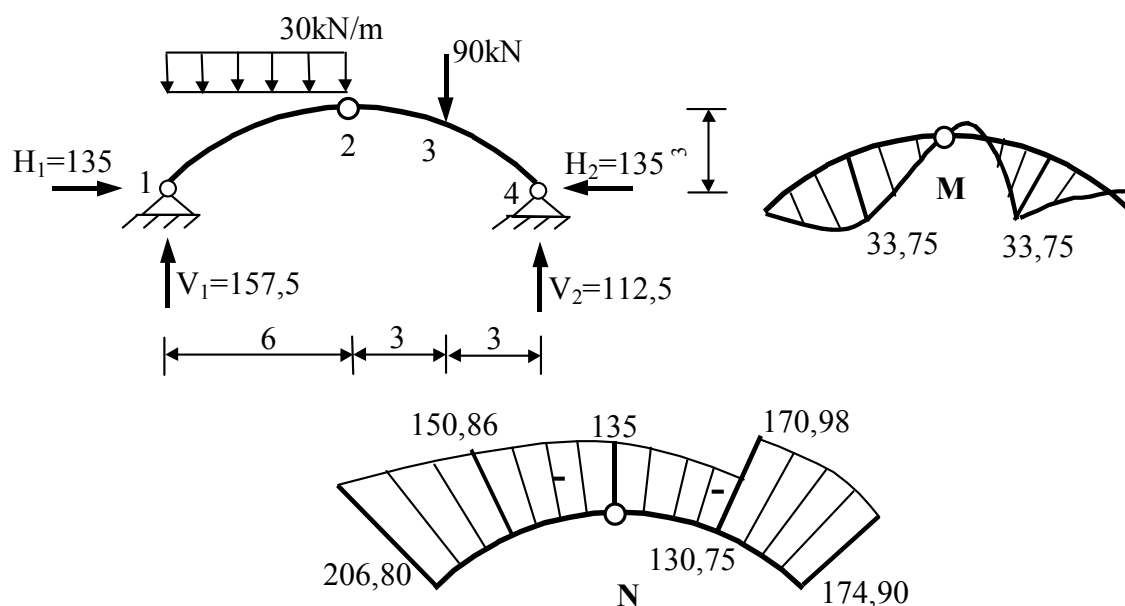


Fig. 4.10

Calculul reacțiunilor verticale

$$\sum M_4 = 0; \quad V_1 \cdot 12 - 30 \cdot 6 \cdot 9 - 90 \cdot 3 = 0 \quad V_1 = 157,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad 30 \cdot 6 \cdot 3 + 90 \cdot 9 - V_4 \cdot 12 = 0 \quad V_4 = 112,5 \text{ kN}$$

Verificare $\sum Y_i = 0 \quad V_1 - 30 \cdot 6 - 90 + V_4 = 0$

Calculul reacțiunilor orizontale

$$\sum M_2^{st} = 0 \quad V_1 \cdot 6 - H_1 \cdot 3 - 30 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad H_1 = 135 \text{ kN}$$

$$\sum M_2^{dr} = 0 \quad 90 \cdot 3 - V_4 \cdot 6 + H_4 \cdot 3 = 0 \quad H_4 = 135 \text{ kN}$$

Verificare $\sum X_i = 0 \quad H_1 - H_4 = 0$

Diagrama de moment încovoietor M se obține calculând momentul încovoietor în secțiunile caracteristice. Acestea sunt la nașteri, la cheie, în secțiunea în care este aplicată forța concentrată, precum și în secțiunea în care momentul încovoietor este maxim pe intervalul încărcat cu forța uniform distribuită.

La nașteri și la cheie, momentul încovoietor este nul. Pe intervalul 1-2 secțiunea în care momentul încovoietor capătă valoarea maximă este dată de condiția ca derivata de ordinul întâi a expresiei momentului încovoietor să fie egală cu zero, sau forța tăietoare să fie egală cu zero, respectiv

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x = 0 \quad (4.23)$$

Într-o secțiune curentă pe intervalul 1-2, expresia momentului încovoietor este

$$M_x = V_1 \cdot x - H_1 \cdot y - 30 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 157,5 \cdot x - 135 \cdot y - 15 \cdot x^2$$

Introducând expresia lui y, relația de mai sus devine

$$M_x = 157,5 \cdot x - 135 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot x \cdot (12 - x)}{12^2} - 15 \cdot x^2$$

Derivând expresia lui M_x și impunând condiția (4.23) rezultă $x=3\text{m}$

Momentul încovoietor maxim are valoarea

$$M_{\max} = 157,5 \cdot 3 - 135 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (12 - 3)}{12^2} - 15 \cdot 3^2 = 33,75\text{kNm (la intrados)}$$

În secțiunea 3 ($y=2,25$), momentul încovoietor este

$$M_3 = -(-V_4 \cdot 3 + H_4 \cdot 2,25) = +33,75\text{kNm (la intrados)}$$

Diagrama de forță axială N se obține calculând acest efort în aceleași secțiuni în care s-a calculat momentul încovoietor.

În secțiunea 1 ($x=0$, $\text{tg } \varphi_1=1$) forța axială are expresia

$$N_1 = -V_1 \sin \varphi_1 - H_1 \cos \varphi_1 = -157,5 \cdot 0,707 - 135 \cdot 0,707 = -206,8\text{kN}$$

În secțiunea unde momentul încovoietor este maxim (la sfertul deschiderii, $x=3$, $\text{tg } \varphi_s=0,5$) forța axială are expresia

$$\begin{aligned} N_s &= -V_1 \sin \varphi_s - H_1 \cos \varphi_s - 30 \cdot 3 \cdot \sin \varphi = \\ &= -157,5 \cdot 0,447 - 135 \cdot 0,894 + 90 \cdot 0,447 = -150,86\text{kN} \end{aligned}$$

În secțiunea de la cheie (2), forța axială are expresia:

$$N_2 = -H_1 = -135\text{kN}$$

În secțiunea în care este aplicată forța concentrată, forța axială are valori diferite corespunzător celor două secțiuni vecine.

Astfel în secțiunea din stânga, forța axială are expresia

$$\begin{aligned} N_{3-\varepsilon} &= V_1 \sin \varphi_3 - H_1 \cos \varphi_3 - 30 \cdot 6 \cdot \sin \varphi_3 = \\ &= 157,5 \cdot 0,447 - 135 \cdot 0,894 - 180 \cdot 0,447 = -130,75\text{kN} \end{aligned}$$

iar în secțiunea din dreapta are expresia

$$N_{3+\varepsilon} = N_{3-\varepsilon} - 90 \cdot \sin \varphi_3 = -130,75 - 90 \cdot 0,447 = -170,98\text{kN}$$

În secțiunea 4 forța axială are expresia

$$N_4 = -V_4 \sin \varphi_4 - H_4 \cos \varphi_4 = -112,5 \cdot 0,707 - 135 \cdot 0,707 = -174,98\text{kN}$$

4.4. ARCUL CU TIRANT

Arcele cu tirant se utilizează în situația în care baza de susținere a arcului nu poate prelua împingerile orizontale sau se ajunge la dimensiuni neeconomice ale acestora. Tirantul este o bară dublu articulată. Calculul acestor arce se conduce în același mod ca și calculul arcelor cu trei articulații.

Reacțiunile verticale se determină din ecuații de moment în raport cu cele două puncte de rezemare, iar reacțiunea orizontală dintr-o ecuație de proiecție pe această direcție, respectiv se utilizează ecuațiile de echilibru static pentru ansamblu (fig. 4.11,a).

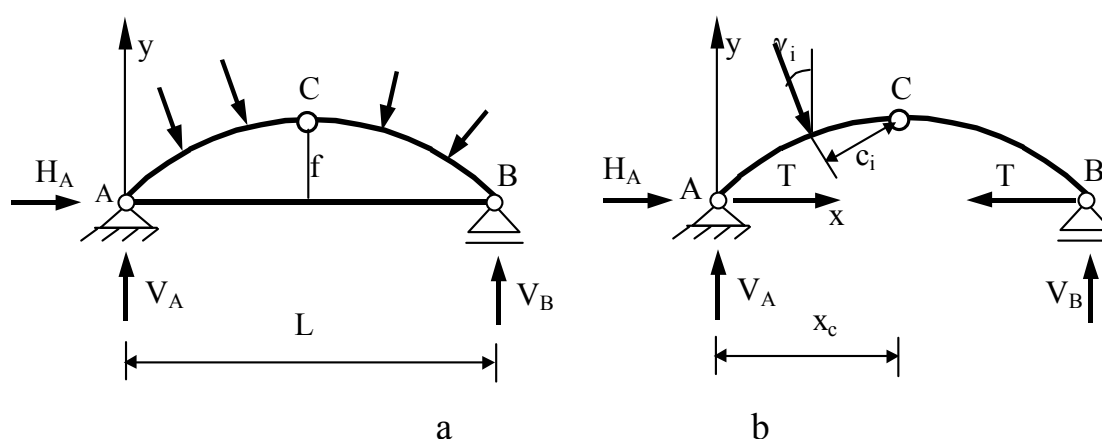


Fig. 4.11

$$\sum M_B = 0 \quad V_A \cdot L - \sum P_i \cdot b_i = 0 \quad V_A = \frac{\sum P_i \cdot b_i}{L} \quad (4.24)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -V_B \cdot L + \sum P_i \cdot a_i = 0 \quad V_B = \frac{\sum P_i \cdot a_i}{L} \quad (4.25)$$

$$\sum X_i = 0 \quad H_A - \sum P_i \sin \gamma_i = 0 \quad H_A = -\sum P_i \sin \gamma_i \quad (4.26)$$

Pentru a trece la calculul eforturilor din secțiunile arcului este necesar să se determine efortul din tirant. Pentru aceasta se secționează tirantul și se introduce echivalentul său mecanic, efortul T (fig.4.11,b).

Din ecuația de momente egală cu zero în raport cu articulația din punctul C pentru forțele de la stânga se obține:

$$V_A \cdot x_c - \sum_{st} P_i \cdot c_i - H_A \cdot f - T \cdot f = 0 \quad (4.27)$$

de unde rezultă expresia efortului T

$$T = \frac{V_A \cdot x_c - \sum_{st} P_i \cdot c_i}{f} - H_A \quad (4.28)$$

În cazul forțelor verticale $H_A = 0$, distanța c_i se măsoară pe orizontală, iar expresia (4.28) devine:

$$T = \frac{M_C^0}{f} \quad (4.29)$$

unde M_C^0 este momentul încovoietor în secțiunea C pe grinda simplu rezemată corespunzătoare.

Expresiile eforturilor se determină cu relațiile stabilite anterior ținând seama de efortul din tirant. Dacă forțele sunt verticale aceste expresii sunt:

$$\begin{aligned} N_x &= -T_x^0 \sin \varphi - T \cos \varphi \\ T_x &= T_x^0 \cos \varphi - T \sin \varphi \\ M_x &= M_x^0 - T \cdot y \end{aligned} \quad (4.30)$$

Exemplul 4.3. Să se determine eforturile la arcul cu tirant din figura 4.12. Arcul este circular având $R=15\text{m}$ și unghiul la centru $2\alpha=120^\circ$.

Ținând cont de relația (4.8)-(4.9), caracteristicile arcului circular sunt:

- deschiderea arcului $L = 2R \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 15 \cdot \sin 60^\circ = 26\text{m}$
- sageata arcului $f = R - R \cos \alpha = 15 - 15 \cdot 0,5 = 7,5\text{m}$

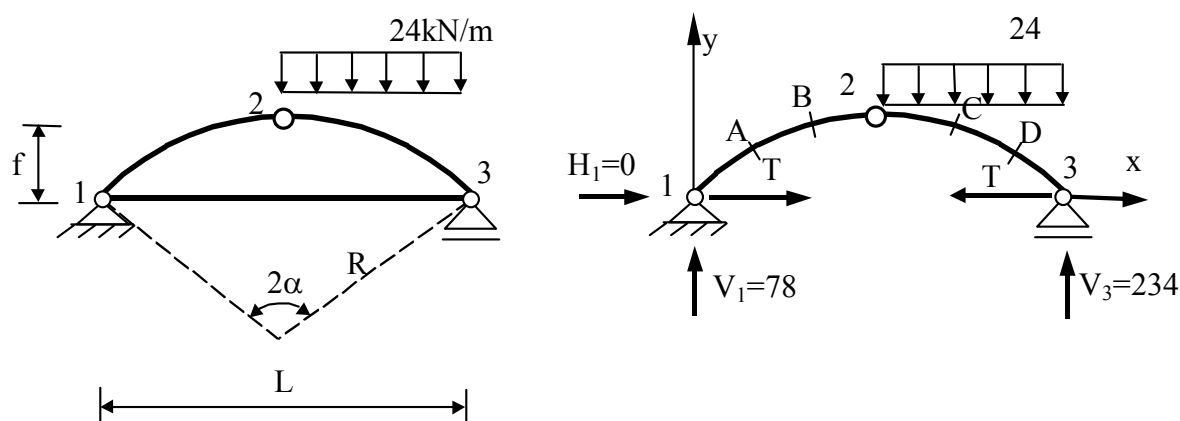


Fig. 4.12

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0; \quad V_1 \cdot 26 - 24 \cdot 13 \cdot 6,5 &= 0 & V_1 &= 78\text{kN} \\ \sum M_1 = 0 \quad 24 \cdot 13 \cdot 19,5 - V_3 \cdot 26 &= 0 & V_3 &= 234\text{kN} \\ \sum X_i = 0 \quad H_1 &= 0 \end{aligned}$$

Calculul efortului din tirant

$$\begin{aligned} \sum M_2^{st} = 0 \quad V_1 \cdot 13 - T \cdot 7,5 &= 0 & T &= 135,2\text{kN} \\ \text{sau } \sum M_2^{dr} = 0 \quad T \cdot 7,5 + 24 \cdot 13 \cdot 6,5 - V_3 \cdot 13 &= 0 & T &= 135,2\text{kN} \end{aligned}$$

Eforturile (N, M) se vor determina în secțiunile 1 A B 2 C D 3. Poziția acestor secțiuni este dată de unghiul la centru φ (tabelul 4.1). Ținând cont de relațiile (4.8), (4.9) pentru definirea poziției secțiunii în sistemul de axe xoy precum și de următoarele expresii ale eforturilor pe fiecare ramură, respectiv

- forță axială: $(1-2) \quad N_x = -V_1 \sin \varphi - T \cos \varphi;$

$$(2-3) \quad N_x = -V_3 \sin \varphi + 24 \cdot (L - x) \sin \varphi - T \cos \varphi ;$$

$$\text{- moment încovoietor } M_x = M_x^0 - T \cdot y$$

se obțin următoarele rezultate

Tabelul 4.1

Secțiunea	φ	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	x_i	y_i	M_x^0	$-Ty$	M_x	N_x
1	60	0,866	0,500	0	0	0	0	0	-135,148
A	40	0,643	0,766	3,345	3,99	260,91	-539,448	-278,538	-153,717
B	20	0,342	0,937	7,860	6,555	613,08	-886,236	-273,156	-153,358
2	0	0	1,000	13,00	7,50	1014	1014	0	-135,200
C	20	0,342	0,937	18,14	6,55	1097,885	-886,236	211,649	-142,195
D	40	0,643	0,766	22,655	3,99	648,462	-539,448	109,014	-202,405
3	60	0,866	0,500	26,00	0	0	0	0	-270,244

Cu aceste valori s-au trasat diagramele de eforturi (fig. 4.13)

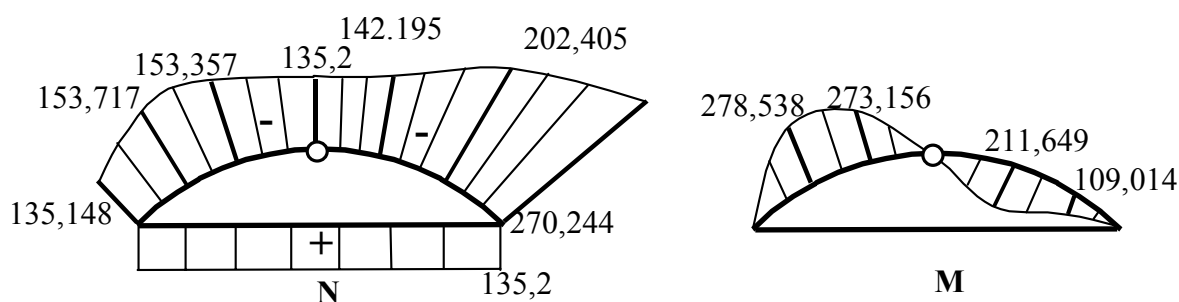


Fig. 4.13

4.5. ARCE OPTIME

Aa cum am prezentat anterior, arcele sunt supuse la compresiune excentrică. Soluția optimă din punct de vedere al formei se obține în cazul în care momentul încovoietor este nul în toate secțiunile.

Un astfel de caz îl reprezintă arcul cu trei articulații încărcat cu o forță verticală, uniform distribuită pe toată deschiderea (4.14)

Pentru obținerea formei ecuației arcului se exprimă momentul încovoietor în secțiunea curentă

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y \quad (4.31)$$

și se impune condiția ca pentru orice valoare a variabilei (x), momentul încovoietor să fie egal cu zero, ceea ce conduce la

$$y = \frac{M_x^0}{H} \quad (4.32)$$

unde M_x^0 reprezintă momentul încovoietor în secțiunea x pe grinda simplu rezemată corespunzătoare, respectiv

$$M_x^0 = V_A \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} pL \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2} \quad (4.33)$$

iar H reprezintă împingerea arcului (reacțiunea orizontală H_A).

Deoarece arcul este simetric

rezultă $V_A = V_B = \frac{1}{2} pL$ și $H_A = H_B$, iar din condiția de echilibru pentru ramura de arc AC, respectiv

$$\sum M_C^{st} = 0; \quad V_A \cdot \frac{L}{2} - H_A \cdot f - p \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0 \quad (4.35)$$

rezultă valoarea împingerii arcului

$$H_A = \frac{pL^2}{8f} \quad (4.36)$$

Cu aceste valori ecuația (4.32) devine

$$y = \frac{4fx}{L^2} (L - x) \quad (4.37)$$

și reprezintă ecuația unui arc parabolic (care a fost stabilită în paragraful 4.1).

Un alt caz îl reprezintă arcul cu trei articulații încărcat cu o presiune normală la curbă și de intensitate constantă p. (fig. 4.15)

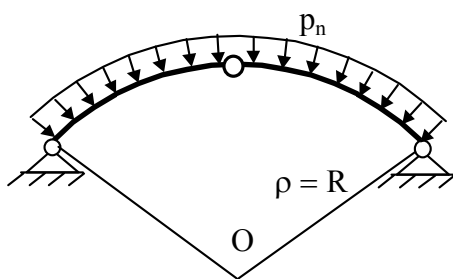


Fig. 4.15

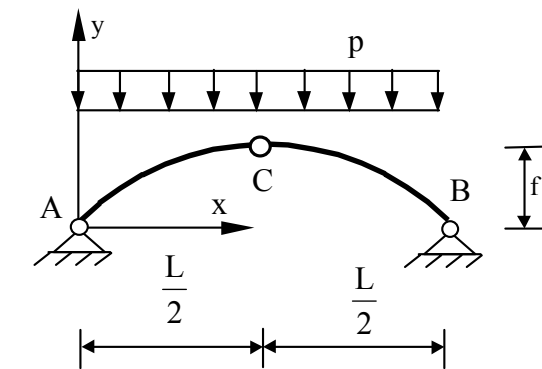


Fig. 4.14

Pentru obținerea formei arcului se utilizează relațiile diferențiale între eforturi și încărcări.

Astfel din relația (4.15,c) rezultă $T=0$, deoarece $M_x=0$. Din relația (4.15,a), deoarece $T=0$ și $p_t=0$ rezultă $N=\text{constant}$, iar din relația (4.15,b) se obține

$$p_n = -\frac{N}{\rho} \quad (4.38)$$

Deoarece $p_n=\text{constant}$ și $N=\text{constant}$ rezultă $\rho=\text{constant}$, deci $\rho=R$ și în consecință curba arcului este un cerc de rază R.

CAPITOLUL V

UTILIZAREA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL ÎN CALCULUL STRUCTURILOR STATIC DETERMINATE

5.1. GENERALITĂȚI

Principiul lucrului mecanic virtual reprezintă un instrument deosebit de eficace pentru exprimarea condiției de echilibru static al sistemelor de forțe ce acționează asupra unui corp sau a unui sistem de corpuri.

Principiul lucrului mecanic virtual se enunță astfel: *condiția necesară și suficientă pentru ca un corp (sau un sistem de corpuri) să fie în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe este ca lucrul mecanic produs de sistemul de forțe parcurgând deplasări virtuale să fie egal cu zero.* În ceea ce privește deplasările virtuale, ele trebuie să fie infinit mici și compatibile cu legăturile sistemului de corpuri. Acest principiu se mai numește și *principiul deplasărilor virtuale*, deoarece forțele reale parcurg deplasări virtuale.

Condiția de echilibru static se exprimă astfel:

$$\delta L = \sum P_i \cdot d\eta_i + \sum M_j \cdot d\psi_j = 0 \quad (5.1)$$

unde $d\eta_i$ reprezintă proiecția deplasării punctului de aplicație al forței P_i pe direcția acestei forțe, iar $d\psi_j$ reprezintă rotirea corpului asupra căruia acționează momentul M_j .

Așa cum se știe din Mecanica Analitică, principiul lucrului mecanic virtual este aplicat mecanismelor cu un grad de libertate. Mecanismele sunt sisteme de corpuri care au un număr mai mic de legături decât numărul minim necesar pentru a obține o structură static determinată invariabilă geometric.

Principiul lucrului mecanic virtual poate fi utilizat în cazul structurilor static determinate pentru determinarea reacțiunilor sau a eforturilor (N, T, M) din orice secțiune.

Pentru aceasta structurile static determinate, care au un număr minim de legături necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării în plan, se transformă în mecanisme cu un grad de libertate prin îndepărtarea unei legături simple, și anume de pe direcția reacțiunii sau a efortului ce urmează a fi determinat.

În ceea ce privește suprimarea legăturilor pentru calculul eforturilor dintr-o secțiune (fig. 5.1,a), aceasta se face după cum urmează:

- pentru determinarea forței axiale se suprimă legătura care împiedică deplasarea relativă după tangenta la axa barei (fig. 5.1,b),

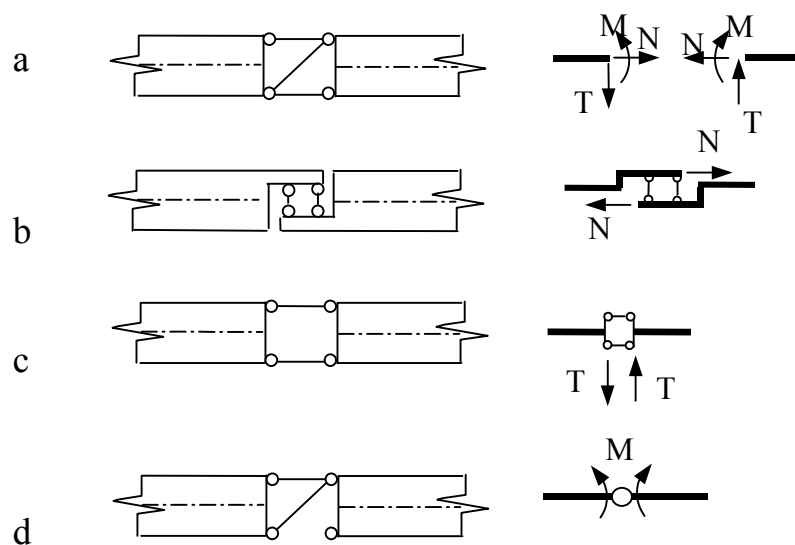


Fig. 5.1

- pentru determinarea forței tăietoare se suprimă legătura care împiedică deplasarea relativă după normala la axa barei (fig. 5.1,c),

- pentru determinarea momentului încovoietor se suprimă legătura care împiedică rotirea relativă a celor două porțiuni (fig. 5.1,d).

Pentru restabilirea situației inițiale, pe direcția legăturii suprimate se introduce echivalentul mecanic S și se impune condiția de echilibru static dat de relația (5.1), respectiv

$$\delta L = S \cdot ds + \sum P_i \cdot d\eta_i + \sum M_j \cdot d\psi_j = 0 \quad (5.2)$$

unde ds reprezintă proiecția deplasării punctului de aplicație al mărimii S pe direcția sa.

Condiția de echilibru (5.2), de lucru mecanic virtual nul, permite determinarea necunoscutei S . Pentru calculul mai multor mărimi statice (reacțiuni sau eforturi) este necesar să se stabilească mecanismul corespunzător pentru fiecare dintre ele, impunerea unei deplasări virtuale și evaluarea lucrului mecanic virtual.

Așa cum reiese din relația (5.2) este necesar să se determine proiecțiile deplasărilor punctelor de aplicație ale forțelor pe direcțiile acestora, precum și rotațiile corpurilor, deplasări care se produc ca urmare a imprimării unei deplasări virtuale mecanismului considerat.

În mod obișnuit, forțele care acționează asupra structurii sunt forțe orizontale și/sau verticale și în consecință interesează deplasările pe aceste direcții. În acest sens se stabilesc diagramele de deplasări, care reprezintă proiecțiile pe o direcție dată a deplasărilor tuturor punctelor sistemului de corpuri raportate la axa de referință normală la direcția dată.

5.2. STABILIREA DIAGRAMELOR DE DEPLASĂRI

Pentru construirea diagramelor de deplasări este necesară cunoașterea centrelor instantanee de rotație și a proprietăților lor. Prin *centru instantaneu de rotație* se înțelege punctul în jurul căruia se rotește un corp aflat în mișcare relativă. Centrul instantaneu de rotație se găsește la intersecția normalelor duse pe direcțiile vitezelor punctelor corpului. Pentru un sistem de corpuri, poziția centrelor instantanee de rotație se determină utilizând următoarea teoremă de coliniaritate: **“La sistemele cinematice plane, trei centre instantanee de rotație a trei corpuri oarecare sunt coliniare”**. Termenul de corp este atribuit și bazei de susținere, care în cele ce urmează se consideră fixă.

În această situație centrele instantanee de rotație pot fi clasificate în:

- **absolute** - se caracterizează prin faptul că deplasările acestor puncte sunt egale cu zero,
- **relative** - se caracterizează prin faptul că deplasările sunt unice pentru două corpuri.

Pentru un sistem de n corpuri există n centre absolute și C_n^2 centre relative.

Ținând cont de clasificarea de mai sus, teorema de coliniaritate a centrelor instantanee de rotație capătă următoarele două forme:

- centrele absolute a două corpuri și centrul lor relativ sunt coliniare,
- centrele relative a trei corpuri, luate două câte două, sunt coliniare.

Uzual corpurile se notează cu cifre romane I, II, III etc., centrele absolute cu (1), (2), (3) etc., iar centrele relative cu (1,2), (1,3), (2,3) etc.

Din definiția centrelor instantanee de rotație, rezultă că articulațiile cu baza de susținere reprezintă centre absolute, iar articulațiile interioare reprezintă centre relative. În general poziția unor centre instantanee de rotație este cunoscută din datele problemei, astfel că pentru trasarea diagramelor de deplasări se determină numai poziția acelor centre instantanee care este necesară, utilizând teoremele de coliniaritate enunțate mai înainte.

În continuare se prezintă mecanismul din figura 5.2. Mecanismul este format din trei corpuri I, II și III. Centrele absolute ale corpurilor I (1) și III (3), precum și centrele relative ale corpurilor I și II (1,2) respectiv II și III (2,3) au poziție cunoscută. Mai este necesar să se determine poziția centrului absolut al corpului II (2) și a centrului relativ al corpurilor I și III (1,3). Centrul absolut al corpului II se determină cu ajutorul corpurilor I și III aplicând prima teoremă de coliniaritate. Astfel (2) se găsește la intersecția următoarelor două direcții:

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2), (2,3), (3) \end{cases}$$

Centrul relativ al corpurilor I și III (1,3) se determină cu ajutorul celor două teoreme de coliniaritate. Astfel (1,3) se va găsi la intersecția următoarelor două direcții

$$(1,3) \begin{cases} (1,3), (1), (3) \\ (1,3), (2,3), (1,2) \end{cases}$$

Cunoscând pozițiile centrelor instantanee de rotație se pot trasa diagramele de deplasări, respectiv proiecțiile deplasărilor punctelor corpurilor ce formează mecanismul pentru o deplasare virtuală dată.

Diagramele de deplasări se pot construi după orice direcție, dar în practică sunt folosite diagramele după direcția verticală și orizontală.

În figura 5.2 sunt prezentate și diagramele de deplasări ale mecanismului pentru o deplasare virtuală ψ_I imprimată corpului I (pentru ușurința scrierii deplasărilor virtuale se renunță la litera d din fața lor, de exemplu deplasarea $d\eta$ se înlocuiește cu η , iar rotirea $d\psi$ se înlocuiește cu ψ).

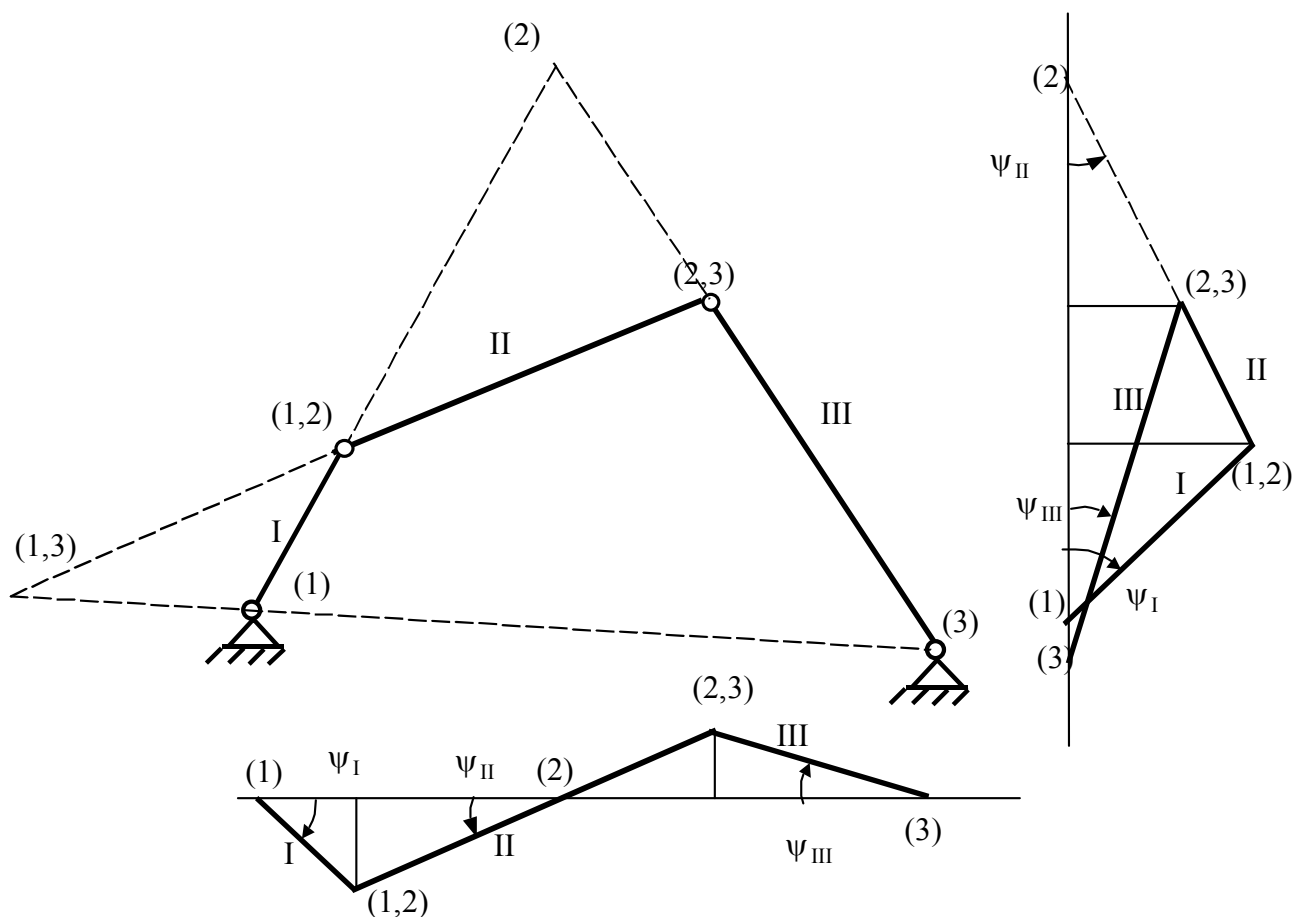


Fig. 5.2

Din analiza diagramelor de deplasări se desprind următoarele concluzii:

- pentru fiecare corp diagramele de deplasări au variație liniară și se anulează în punctele în care se proiectează centrele absolute ale corpurilor respective;

- diagramele de deplasări a două corpuri au ordonata comună în dreptul centrului relativ corespunzător;

- deoarece unghiul de rotire al corpurilor este același față de ambele axe (orizontală și verticală), rezultă că direcțiile pozițiilor deplasate ale unui corp în cele două diagrame sunt normale. Acest fapt reprezintă o modalitate de verificare a corectitudinii diagramelor;

- orice deplasare se poate determina funcție de deplasarea dată mecanismului prin relații geometrice simple.

În concluzie, aplicarea concretă a principiului lucrului mecanic virtual în calculul unei reacțiuni sau al unui efort la structuri static determinate necesită următoarele etape:

- se îndepărtează legătura corespunzătoare mărimii statice ce urmează a fi determinată și se introduce în locul ei echivalentul său mecanic;

- se stabilesc centrele instantanee de rotație (absolute și relative) pentru mecanismul obținut;

- se imprimă o deplasare virtuală mecanismului, care trebuie să fie infinit mică și compatibilă cu legăturile, și se trasează diagramele de deplasări;

- se determină rotirile corpurilor și deplasările punctelor de aplicație ale forțelor funcție de deplasarea virtuală dată;

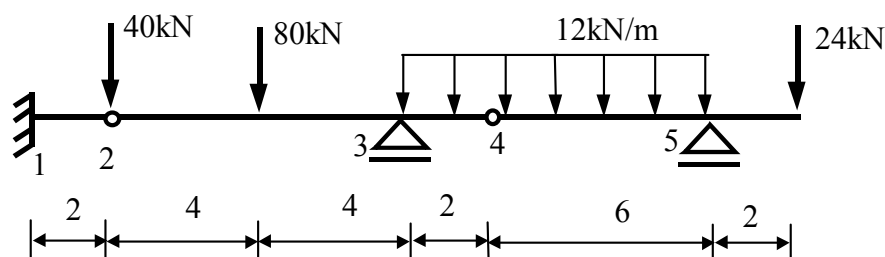
- se scrie ecuația de echilibru static sub forma lucrului mecanic virtual (5.2) de unde se determină mărimea statică căutată.

Observație: Dacă legătura unui corp cu baza de susținere este un reazem simplu, atunci centrul absolut al corpului respectiv se va găsi pe perpendiculara la planul de rezemare.

5.3 APLICAREA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL LA GRINZI GERBER

Exemplul 5.1 Pentru grinda Gerber din figura 5.3 să se determine reacțiunile V_3 și M_1 , precum și forța tăietoare $T_{3-\epsilon}$ folosind principiul lucrului mecanic virtual.

Fig. 5.3



Calculul reacțiunii V_3 . Reazemul 3 se înlocuiește cu echivalentul său mecanic, o forță verticală V_3 . Astfel structura devine un mecanism cu un grad de libertate format din două corpuri (fig. 5.4), deoarece corpul I este fix.

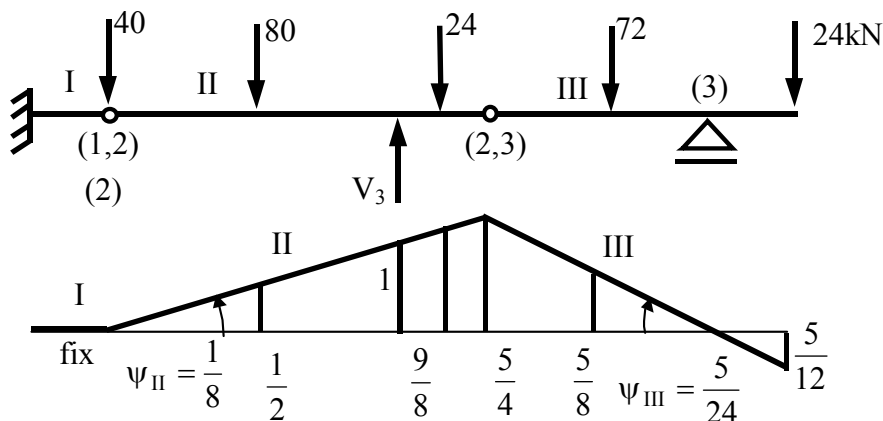


Fig. 5.4.

Corpul I este fix deoarece încastrarea din secțiunea 1 este o legătură care suprimă toate deplasările posibile. În aceste condiții centrul relativ (1,2) devine și centru absolut pentru corpul II (2). Centrul absolut pentru corpul III se determină utilizând prima teoremă de coliniaritate, respectiv

$$(3) \begin{cases} (3), (2,3), (2) \\ (3) \perp \text{reazem} \end{cases}$$

Pentru trasarea diagramei de deplasări se impune mecanismului o deplasare virtuală (de exemplu o deplasare unitară pe direcția reacțiunii V_3). Diagrama de deplasări (figura 5.4) a fost trasată ținând cont de particularitățile prezentate anterior, respectiv într-un centru absolut deplasarea corpului este nulă, iar într-un centru relativ cele două corpuri au deplasare comună, iar diagramele au variație liniară.

Condiția de echilibru static, utilizând principiul lucrului mecanic virtual este:

$$\delta L = 0; \quad V_3 \cdot 1 - 80 \cdot \frac{1}{2} - 12 \cdot 2 \cdot \frac{9}{8} - 12 \cdot 6 \cdot \frac{5}{8} + 24 \cdot \frac{5}{12} = 0$$

de unde rezultă

$$V_3 = 102 \text{ kN}$$

Semnul fiind pozitiv rezultă că sensul real este identic cu cel ales inițial.

De remarcat faptul că forța uniform distribuită acționează pe două corpuri și în consecință se determină ordonata pentru fiecare rezultantă a încărcării.

Calculul momentului M_1 . În locul încastrării se introduce o articulație și o reacțiune moment astfel că structura reală devine un mecanism cu un grad de libertate format din trei corpuri (fig. 5.5).

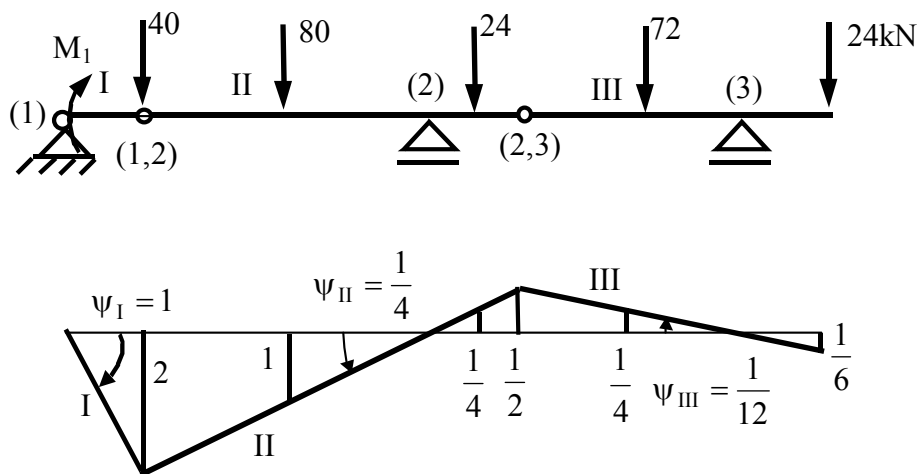


Fig. 5.5

Folosind prima teoremă de coliniaritate se determină pozițiile centrelor absolute ale corpurilor III și III, respectiv

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2) \perp \text{reazem} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} (3), (2,3), (2) \\ (3) \perp \text{reazem} \end{cases}$$

Se imprimă mecanismului o deplasare virtuală $\psi_I = 1$ (o rotire corpului I) și se trasează diagrama de deplasări pe verticală.

Condiția de echilibru static este

$$\delta L = 0; \quad M_1 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 80 \cdot 1 - 12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} - 12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} + 24 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

de unde

$$M_1 = -140 \text{ kNm}$$

Semnul minus (-) indică faptul că în realitate sensul momentului este invers decât cel considerat inițial, respectiv fibra întinsă va fi cea superioară.

Calculul forței tăietoare $T_{3-\varepsilon}$. Pentru determinarea forței $T_{3-\varepsilon}$ se elimină legătura care permite translația pe verticală și se introduce echivalentul mecanic care este reprezentat de perechea de forțe acționând pe cele două fețe ale secțiunii respective (fig. 5.6).

În urma acestei operații, corpurile II și III legate prin intermediul celor doi penduli vor avea doar mișcare de translație relativă, respectiv vor rămâne paralele (centrul relativ (2,3) fiind la infinit pe orizontală). Celelalte centre absolute se determină utilizând prima teoremă de coliniaritate. Se imprimă mecanismului o deplasare virtuală care constă într-o deplasare relativă a secțiunii 3- ε având mărimea unitate și direcția forței tăietoare. Secțiunea din dreapta nu se va deplasa pe această direcție, datorită reazemului, ci numai porțiunea din stânga. Diagrama de deplasări este prezentată în figura 5.6.

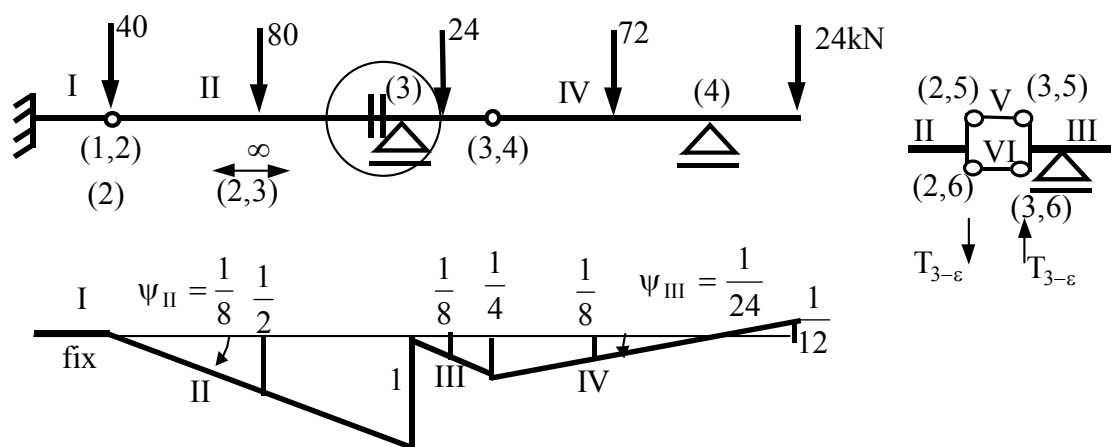


Fig. 5.6

Ecuția de echilibru static este:

$$\delta L = 0; \quad T_{3-\epsilon} \cdot 1 + 80 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{8} - 24 \cdot \frac{1}{12} = 0$$

de unde rezultă

$$T_{3-\epsilon} = -50 \text{ kN}$$

5.4 APLICAREA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL LA CADRE PLANE

Exemplul 5.2. Pentru cadrul din figura 5.7 să se determine reacțiunea H_1 și momentul încovoietor din secțiunea i utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

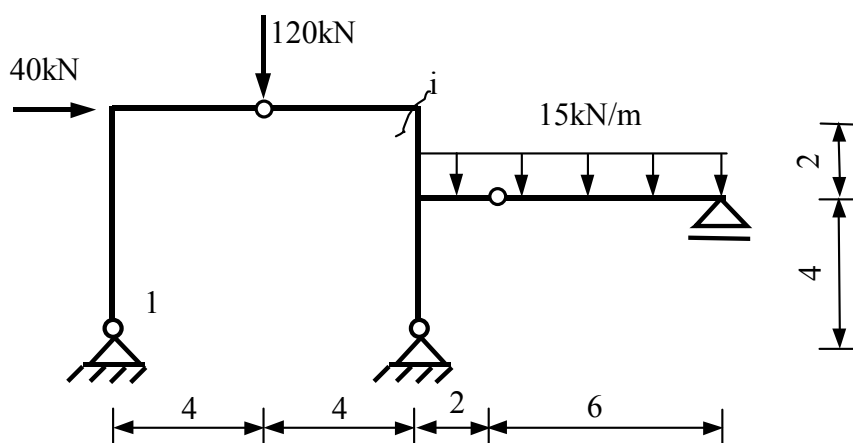


Fig. 5.7

Calculul reacțiunii H_1 . Se îndepărtează legătura corespunzătoare reacțiunii orizontale și se introduce echivalentul mecanic, o forță orizontală H_1 (fig. 5.8).

Mecanismul astfel format cuprinde 3 corpuri ale căror centre instantanee se determină utilizând teoremele de coliniaritate astfel:

$$(1) \begin{cases} (1), (1,2), (2) \\ (2) \perp \text{reazem} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} (3), (2,3), (2) \\ (3) \perp \text{reazem} \end{cases}$$

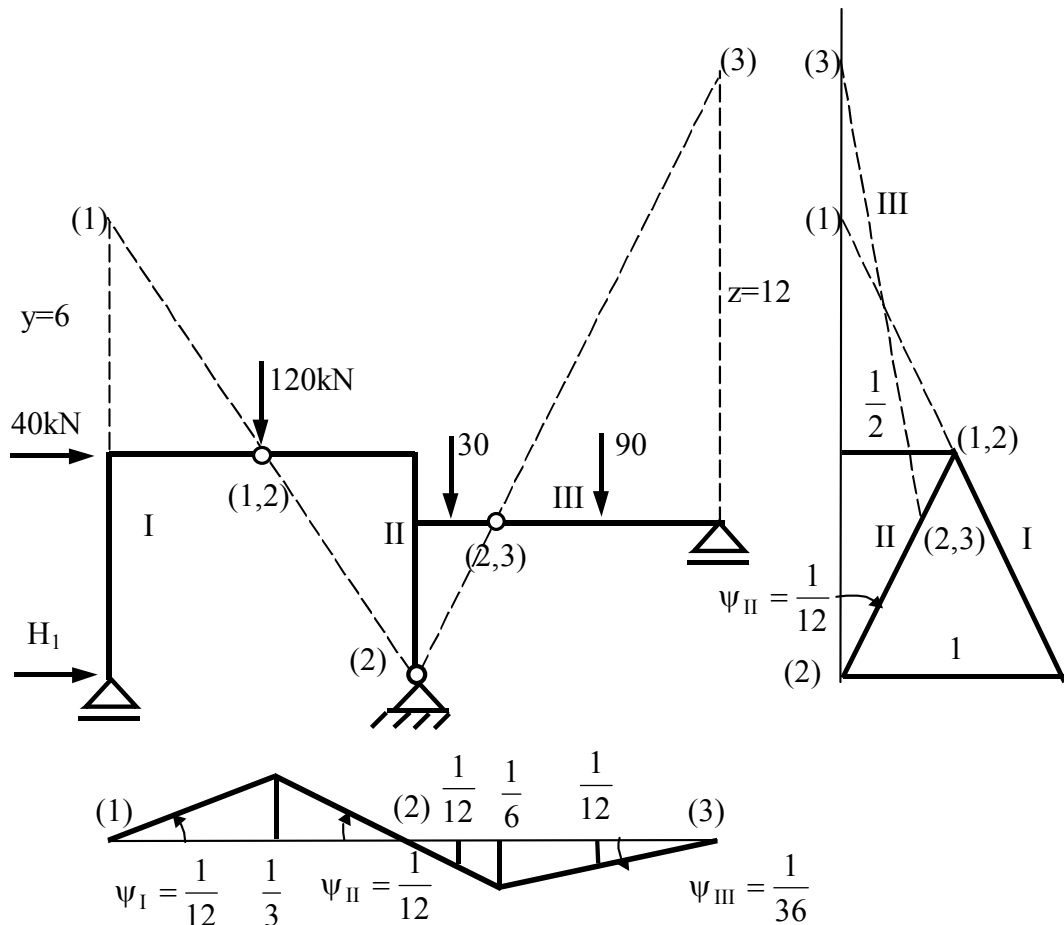


Fig. 5.8

Se impune mecanismului o deplasare virtuală unitară pe direcția reacțiunii H_1 și se trasează diagramele de deplasări pe orizontală și pe verticală.

Condiția de echilibru static este

$$\delta L = 0; \quad H_1 \cdot 1 + 40 \cdot \frac{1}{2} - 120 \cdot \frac{1}{3} + 15 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} + 15 \cdot 6 \cdot \frac{1}{12} = 0$$

de unde rezultă

$$H_1 = 10 \text{ kN}$$

Calculul momentului încovoietor M_i . Eliminând legătura corespunzătoare momentului încovoietor din secțiunea i și introducând echivalentul mecanic se obține mecanismul din figura 5.9, care este format din 4 corpuri.

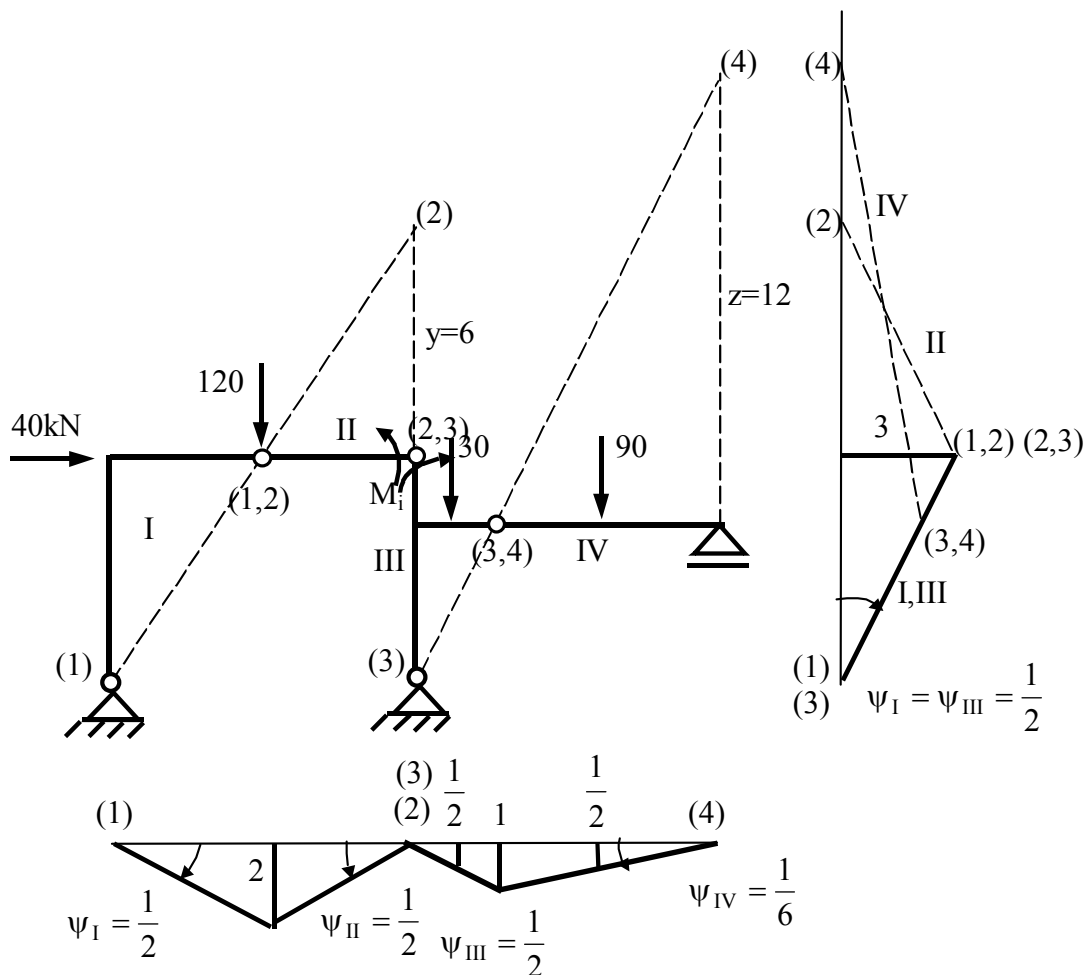


Fig. 5.9

Centrele absolute ale corpurilor II și IV se obțin utilizând prima teoremă de coliniaritate astfel

$$\begin{matrix} (2) \end{matrix} \begin{cases} (2), (2,3), (3) \\ (2), (1,2), (1) \end{cases} \quad \begin{matrix} (4) \end{matrix} \begin{cases} (4), (3,4), (3) \\ (4) \perp \text{reazem} \end{cases}$$

În continuare se imprimă mecanismului o deplasare virtuală, o rotire relativă a articulației (2,3) ($\psi_{23} = 1$, adică $\psi_2 + \psi_3 = 1$) astfel încât lucrul mecanic produs de perechea de momente să fie pozitiv.

Pentru început se trasează diagrama de deplasări pe orizontală după care ținând cont de ortogonalitatea diagramelor se trasează diagrama de deplasări pe verticală.

Ținând cont de poziția centrului relativ (2,3) se determină rotirile corpurilor II și III și apoi celelalte rotiri și ordonate necesare în scrierea ecuației de echilibru static.

Aceasta are forma

$$\delta L = 0; \quad M_i \cdot (\psi_{II} + \psi_{III}) + 40 \cdot 3 + 120 \cdot 2 + 15 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 15 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

de unde rezultă

$$M_i = -210 \text{ kNm}$$

5.5. APLICAREA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL LA GRINZI CU ZĂBRELE

Exemplul 5.3 Să se determine eforturile din barele 6-8, 5-7, și 6-7 la grinda cu zăbrele din figura 5.10 utilizând principiul lucrului mecanic virtual

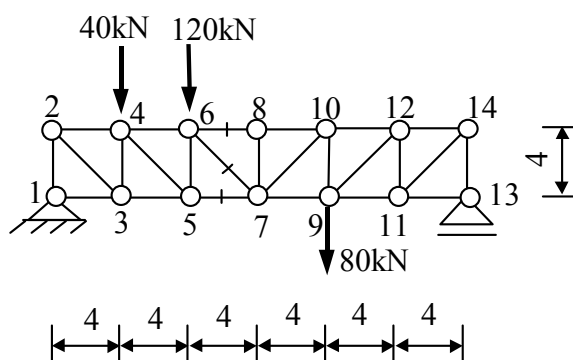


Fig. 5.10

Calculul efortului S_{68} . Se secționează bara respectivă și se introduce echivalentul său mecanic obținându-se un mecanism format din două corpuri (fig. 5.11).

Imprimând o deplasare virtuală, respectiv o deplasare relativă egală cu unitatea nodurilor 6 și 8 se obțin diagramele de deplasări. Ținând cont de poziția centrului relativ (1,2) se determină rotirile corpurilor I și II și apoi ordonatele punctelor de aplicație ale forțelor.

Ecuția de echilibru static este

$$\delta L = 0; \quad S_{68} \cdot 1 + 40 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot 1 + 80 \cdot 1 = 0$$

de unde

$$S_{68} = -220 \text{ kN}$$

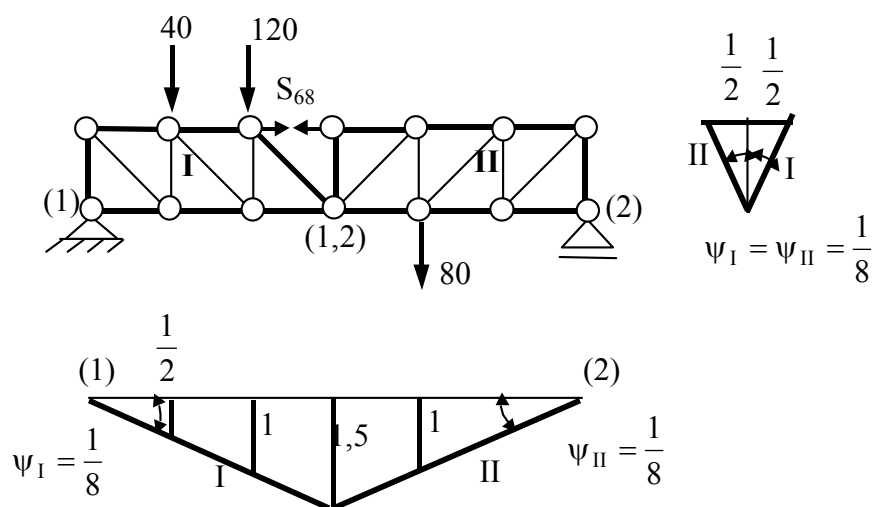


Fig. 5.11

Calculul efortului I_{57} . Se secționează bara 5-7 și se introduce echivalentul său mecanic obținându-se un mecanism format din două corpuri (fig. 5.12).

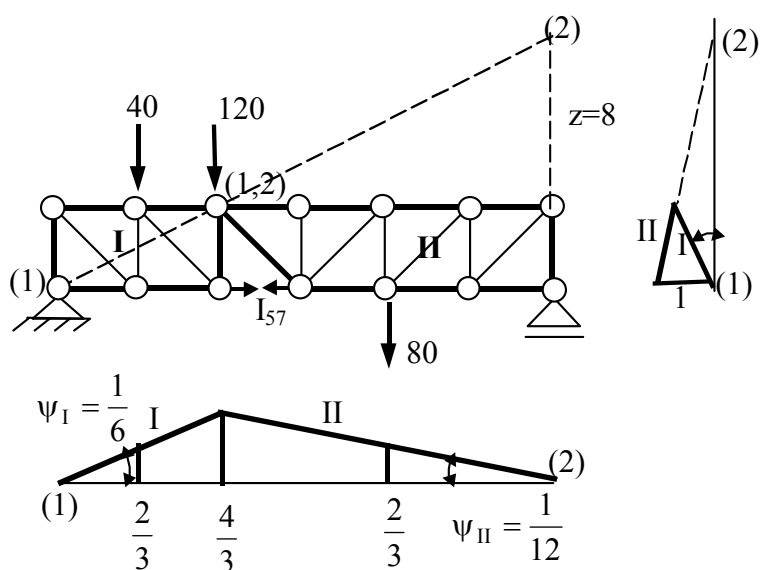


Fig. 5.12

Deplasarea virtuală se consideră deplasarea relativă egală cu unitatea a nodurilor 5 și 7 în sensul efortului I_{57} . Astfel pentru început se trasează diagrama de deplasări pe orizontală și apoi cea pe verticală. Deoarece nodul 5 nu se deplasează pe orizontală, fiind pe aceeași linie cu centrul absolut (1), rezultă că deplasarea relativă revine în totalitate corpului II. Astfel din diagrama de deplasări pe orizontală se

determină rotirile corpurilor, iar din diagrama de deplasări pe verticală deplasările punctelor de aplicație ale forțelor.

Ecuția de echilibru static este

$$\delta L = 0; \quad I_{57} \cdot 1 - 40 \cdot \frac{2}{3} - 120 \cdot \frac{4}{3} - 80 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

de unde

$$S_{57} = 240 \text{ kN}$$

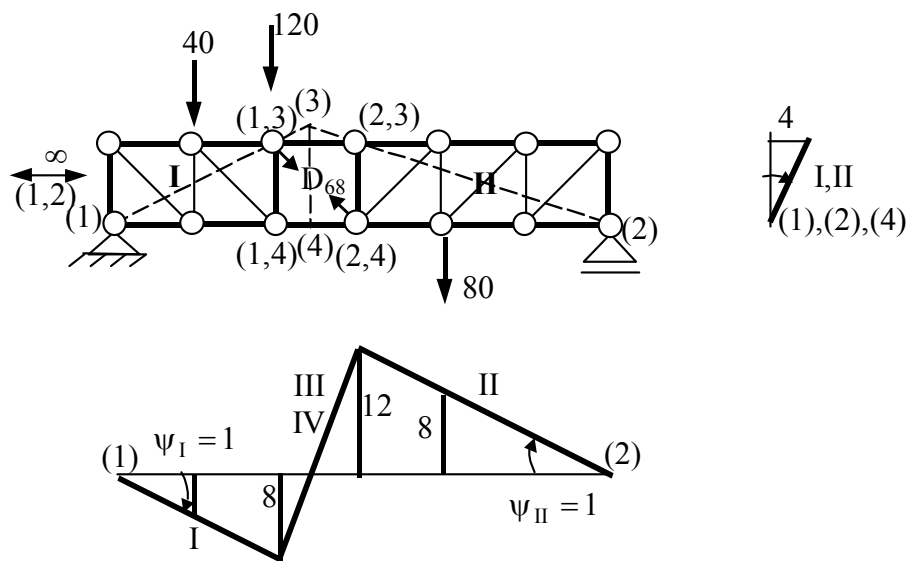
Calculul efortului D_{58} . Se înlocuiește bara 5-8 cu echivalentul său mecanic D_{58} , astfel că mecanismul format cuprinde 4 corpuri (fig. 5.13). Utilizând cea de-a doua teoremă de coliniaritate se determină centrele relative (1,2) și (3,4) astfel

$$(1,2) \begin{cases} (1,2), (2,3), (1,3) \\ (1,2), (2,4), (1,4) \end{cases} \quad (3,4) \begin{cases} (3,4), (1,3), (1,4) \\ (3,4), (2,3), (2,4) \end{cases}$$

Deoarece centrul relativ (1,2) este la infinit rezultă că cele două corpuri rămân paralele în timpul mișcării. La fel se comportă și corpurile III și IV.

Imprimând o deplasare virtuală ($\psi_I = 1$) se obțin diagramele de deplasări pe orizontală și pe verticală. Deoarece centrul relativ (1,2) este la infinit rotirile celor două corpuri sunt egale ($\psi_I = \psi_{II}$), iar diagramele corespunzătoare corpurilor III și IV se confundă.

Fig. 5.13



Ecuția de echilibru static este

$$\delta L = 0; \quad D_{68} \cos \alpha \cdot 4 + D_{68} \sin \alpha \cdot 8 + D_{68} \sin \alpha \cdot 12 + 40 \cdot 4 + 120 \cdot 8 - 80 \cdot 8 = 0$$

de unde

$$D_{68} = -28,288 \text{ kN}$$

CAPITOLUL VI

LINII DE INFLUENȚĂ

6.1. GENERALITĂȚI

În capitolele anterioare au fost studiate diferite tipuri de structuri de rezistență din punct de vedere al calculului eforturilor și al deplasărilor secțiunilor produse de încărcări având poziție fixă.

În practică, în afara încărcărilor care au mărime și poziție fixă (cum ar fi încărcările permanente) există și încărcări mobile, cum ar fi: convoaiele de forțe produse de roțile locomotivelor și a vagoanelor la podurile de cale ferată, convoaiele produse de podurile rulante, convoaiele produse de vehiculele pe pneuri la podurile pe șosea.

Convoaiele de acțiuni mobile sunt date în standarde. Astfel distanța între forțele unui convoi mobil este constantă, ordinea forțelor este fixă, iar orientarea și mărimea forțelor din convoi rămân nemodificate.

Dimensionarea unei structuri supuse la forțe mobile presupune cunoașterea poziției celei mai defavorabile de solicitare pentru fiecare efort în parte. Aceasta impune determinarea poziției care să conducă la valoarea maximă a efortului căutat. Rezolvarea acestei probleme se realizează prin folosirea liniilor de influență.

Liniile de influență se construiesc pentru o forță mobilă unitară și utilizarea lor are la bază principiul suprapunerii efectelor.

Astfel, dacă se consideră o structură parcursă de un convoi de forțe $P_1, P_2, \dots, P_n$ care la un moment dat are poziția din figura. 6.1, atunci efortul S_i din secțiunea i pentru orice poziție a convoiului se poate scrie sub forma

$$S_i = s_{i1} \cdot P_1 + s_{i2} \cdot P_2 + \dots + s_{in} \cdot P_n \quad (6.1)$$

unde s_{ij} reprezintă efortul din secțiunea i când pe structură acționează numai o forță unitară $P_j=1$ aplicată în secțiunea j .

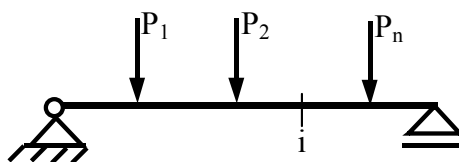


Fig. 6.1

Relația (6.1) se poate scrie pentru orice poziție a convoiului pe structură, dar pentru o altă poziție a convoiului, coeficienții s_{ij} au alte valori. Coeficienții s_{ij} poartă numele de *coeficienți de influență*.

Raportând acești coeficienți de influență față de o linie de referință se obține o diagramă denumită *linia de influență a efortului S_i* . Deci, **linia de influență este o diagramă care reprezintă variația unei mărimi statice (reacțiune sau efort) dintr-o secțiune când o forță egală cu unitatea parcurge structura dintr-un capăt în celălalt**. O ordonată a liniei de influență reprezintă valoarea mărimii statice considerate când forța egală cu unitatea se află în secțiunea din dreptul ordonatei respective.

6.2. MODALITĂȚI DE CONSTRUIRE A LINIILOR DE INFLUENȚĂ

Liniile de influență se pot construi pe cale analitică sau utilizând principiul lucrului mecanic virtual (pe cale cinematică).

6.2.1. Determinarea liniilor de influență pe cale analitică

Determinarea pe cale analitică a liniilor de influență se face utilizând ecuațiile de echilibru static. Pentru aceasta se scrie o ecuație de echilibru static care să conțină atât efectul mărimii necunoscute cât și al cauzei mobile unitare aplicat pe diferitele porțiuni ale structurii.

Astfel se obțin expresiile coeficienților de influență pentru fiecare domeniu al structurii ca funcție de o variabilă independentă (poziția forței unitare). Reprezentând grafic ecuațiile pentru fiecare coeficient de influență în parte se obține linia de influență căutată. Această metodă este generală și se poate utiliza la orice structură static determinată.

În continuare se prezintă metoda analitică pentru stabilirea liniilor de influență la grinda simplu rezemată.

Exemplul 6.1. Pentru grinda simplu rezemată din figura 6.2 se vor trasa liniile de influență ale reacțiunilor V_1 și V_2 , a forței tăietoare T_i și a momentului încovoietor M_i . Se consideră forța unitară $P=1$ aplicată în secțiunea definită prin distanțele x și x' față de reazeme.

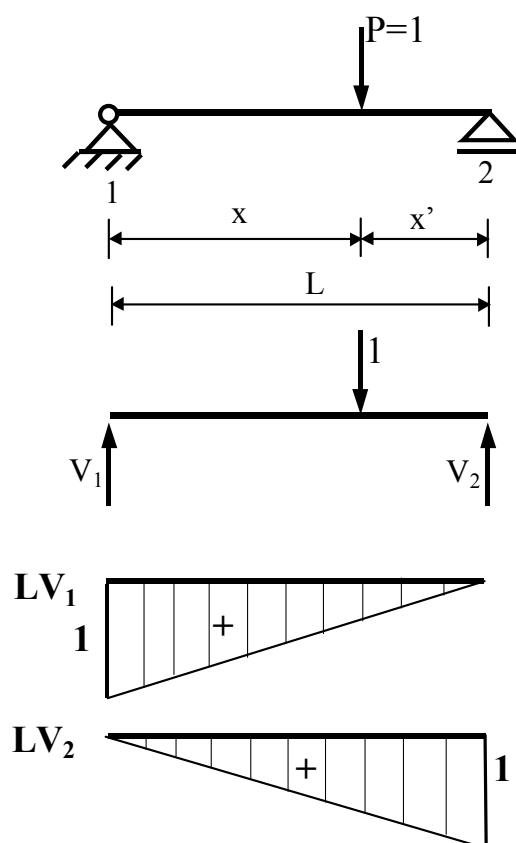


Fig. 6.2

Linia de influență are variație liniară cuprinsă între 0 și 1.

Linia de influență a forței tăietoare T_i . Se consideră grinda simplu rezemată din figura 6.3 la care secțiunea i este definită de distanțele x_i și x_i' . Reacțiunile au fost determinate anterior, acestea având expresiile $V_1 = 1 \cdot \frac{x'}{L}$ și $V_2 = 1 \cdot \frac{x}{L}$, astfel că pentru determinarea liniei de influență se consideră două domenii 1-i și i-2.

a) forța $P_i=1$ se găsește pe intervalul 1-i ($0 < x < x_i$).

În acest caz forța tăietoare T_i are expresia

$$T_i = V_1 - 1 = \frac{x' - L}{L} = -\frac{x}{L} = -V_2$$

deci forța tăietoare are aceeași variație ca și reacțiunea V_2 , dar cu semnul minus.

b) forța $P_i=1$ se găsește pe intervalul i-2 ($0 < x' < x_i'$)

În acest caz forța tăietoare din secțiunea I are expresia

$$T_i = V_1 = 1 \cdot \frac{x'}{L}$$

Linia de influență a reacțiunii V_1 .

Scriind o ecuație de moment în raport cu punctul 2 rezultă

$$V_1 \cdot L - 1 \cdot x' = 0 \quad V_1 = 1 \cdot \frac{x'}{L} = 1 \cdot v_{1x}$$

Coeficientul de influență al reacțiunii V_1 este $v_{1x} = \frac{x'}{L}$ și arată mărimea reacțiunii V_1 când forța mobilă se află în poziția curentă definită de distanța x' . Linia de influență are o variație liniară cuprinsă între 1 și 0.

Semnul plus (+) indică faptul că oriunde s-ar afla forța $P=1$, reacțiunea are sensul indicat. O ordonată a liniei de influență a reacțiunii V_1 reprezintă mărimea acestei reacțiuni când forța egală cu unitatea se află chiar în dreptul ordonatei considerate.

Linia de influență a reacțiunii V_2 .

Scriind o ecuație de moment în raport cu punctul 1 se obține

$$1 \cdot x - V_2 \cdot L = 0$$

$$V_2 = 1 \cdot \frac{x}{L} = 1 \cdot v_{2x}$$

deci forța tăietoare are aceeași variație ca și reacțiunea V_1

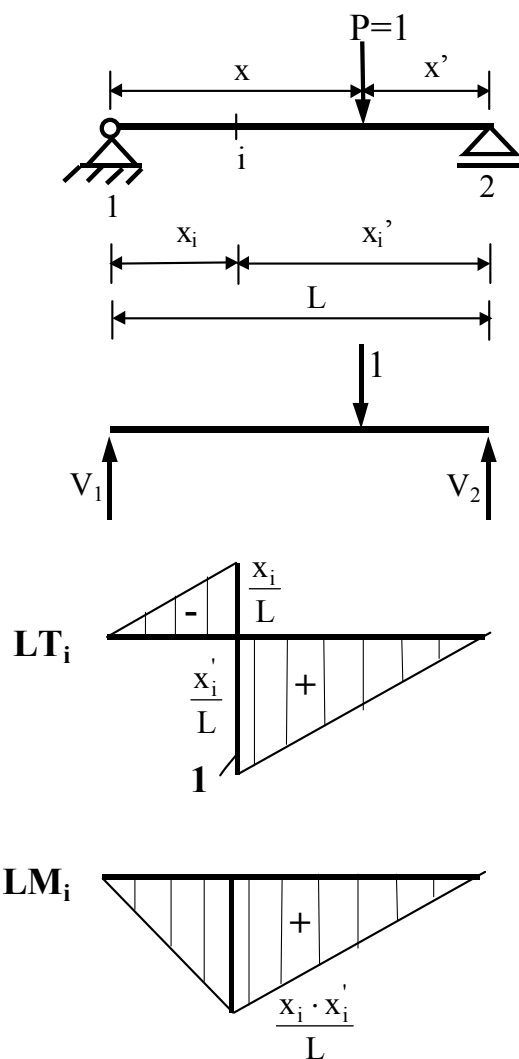


Fig. 6.3

Momentul încovoietor M_i capătă valoarea $\frac{x_i \cdot x_i'}{L}$ dacă forța $P_i=1$ este aplicată în secțiunea i.

6.2.2. Determinarea liniilor de influență pe cale cinematică

Determinarea pe cale cinematică a liniilor de influență se realizează cu utilizând principiul lucrului mecanic virtual. Astfel structura se transformă într-un mecanism cu un grad de libertate prin eliminarea legăturii existente pe direcția mărimii statice (reacțiune sau efort) a cărei linie de influență urmează a fi trasată și introducerea mărimii statice S . În această situație structura va fi încărcată cu mărimea statică S și cu o forță egală cu unitatea. Împunând mecanismului o deplasare virtuală

În concluzie linia de influență este formată din două segmente, de pe fiecare interval în parte, în secțiunea i suma celor două ordonate fiind egală cu unitatea, aceasta reprezentând scara liniei de influență. Se observă că cele două segmente sunt paralele.

Linia de influență a momentului încovoietor M_i .

Se consideră aceeași grindă (fig. 6.3) pentru care reacțiunile sunt $V_1 = 1 \cdot \frac{x'}{L}$ și

$V_2 = 1 \cdot \frac{x}{L}$. Pentru determinarea liniei de influență M_i se consideră două intervale, 1-i și i-2, în care se găsește forța $P_i=1$,

- intervalul 1-i ($0 < x < x_i$)

Expresia momentului încovoietor în secțiunea i este

$$M_i = V_2 \cdot x_i' = \frac{x \cdot x_i'}{L}$$

- intervalul i-2 ($0 < x' < x_i'$)

Expresia momentului încovoietor în secțiunea i este

$$M_i = V_1 \cdot x_i = \frac{x' \cdot x_i}{L}$$

Cu aceste expresii, linia de influență a momentului încovoietor M_i este trasată în figura 6.3.

și notând cu δs deplasarea pe direcția lui S și cu δp deplasarea pe direcția forței unitare, expresia lucrului mecanic virtual capătă forma:

$$S \cdot \delta s + 1 \cdot \delta p = 0 \quad (6.2)$$

de unde rezultă

$$S = -1 \cdot \frac{\delta p}{\delta s} \quad (6.3)$$

Dacă se alege $\delta s = -1$, respectiv deplasarea pe direcția lui S egală cu unitatea și de sens contrar sensului lui S, atunci relația (6.3) devine

$$S = \delta p \quad (6.4)$$

relație care arată că în aceste condiții mărimea S este egală cu mărimea deplasării secțiunii în care se află forța egală cu unitatea și are același semn.

Sensul deplasării și implicit al efortului S este dat de sensul forței egale cu unitatea. Astfel dacă deplasarea are loc în sensul de acțiune al forței unitate, atunci semnul este plus, iar dacă deplasarea are loc în sens invers sensului de acțiune al forței unitate atunci semnul este minus. În mod obișnuit convoiul de forțe are sens gravitațional astfel că dacă diagrama de deplasări se găsește sub axa de referință semnul este plus, iar dacă se găsește deasupra axei de referință semnul este minus.

În concluzie, determinarea liniilor de influență pe cale cinematică necesită parcurgerea următoarelor etape:

- se înlocuiește legătura corespunzătoare mărimii statice S cu echivalentul său mecanic, astfel că structura static determinată devine un mecanism cu un grad de libertate;
- se imprimă o deplasare virtuală și se trasează diagrama de deplasări;
- diagrama de deplasări se transformă în linie de influență prin atașarea scării și a semnului, conform celor prezentate anterior.

6.2.2.1. Determinarea liniilor de influență la grinzi Gerber.

Exemplul 6.1. Să se traseze linia de influență a reacțiunilor V_1 , V_2 , V_4 și a eforturilor $T_{2+\epsilon}$ și M_2 la grinda Gerber din figura 6.4.

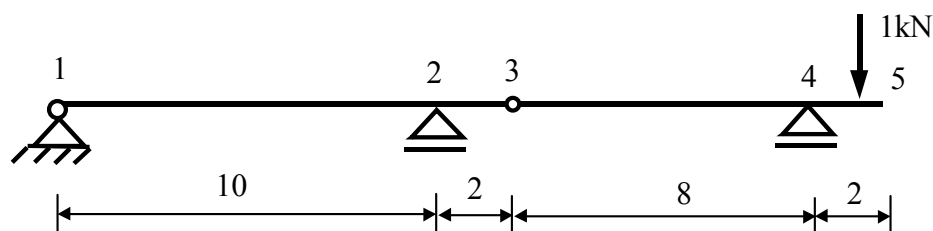


Fig. 6.4

Ținând cont de etapele ce trebuie parcurse în stabilirea liniilor de influență se obțin următoarele rezultate:

- Linia de influență LV_1 (fig. 6.5)

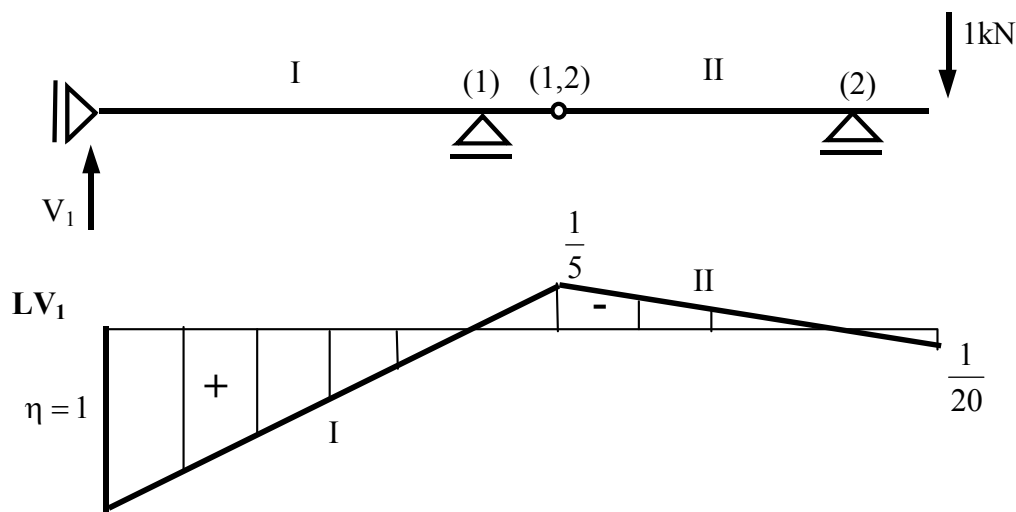


Fig. 6.5

Din analiza liniei de influență LV_1 rezultă că dacă forța unitară se găsește pe intervalul 1-2 sau 4-5, reacțiunea V_1 este pozitivă, iar dacă se găsește pe intervalul 2-4 este negativă. Poziția forței pentru care reacțiunea este maximă este chiar secțiunea 1.

- Linia de influență LV_2 (fig. 6.6)

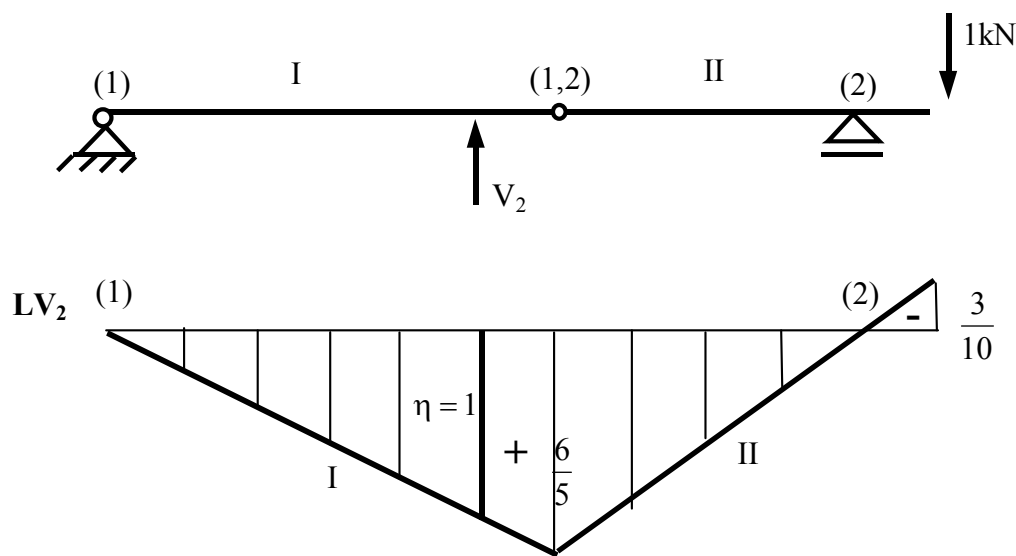


Fig. 6.6

- Linia de influență LV_4 (fig. 6.7)

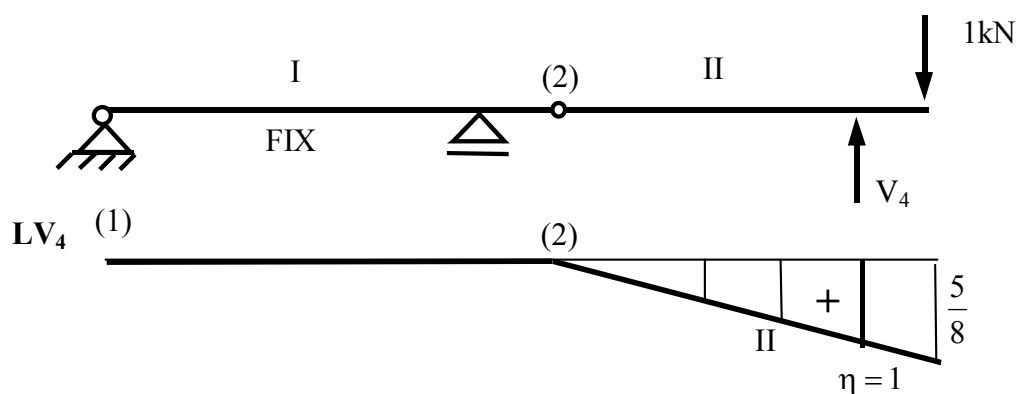


Fig. 6.7

Din linia de influență LV_4 rezultă că dacă forța unitară se găsește pe intervalul 1-2-3 (grinda principală) reacțiunea V_4 este nulă.

- Linia de influență $LT_{2+\varepsilon}$ (fig. 6.8)

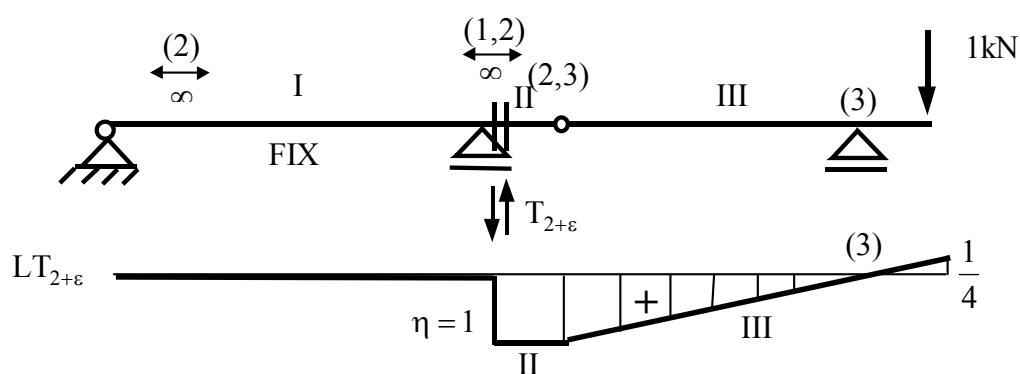


Fig. 6.8

- Linia de influență LM_2 (fig. 6.9)

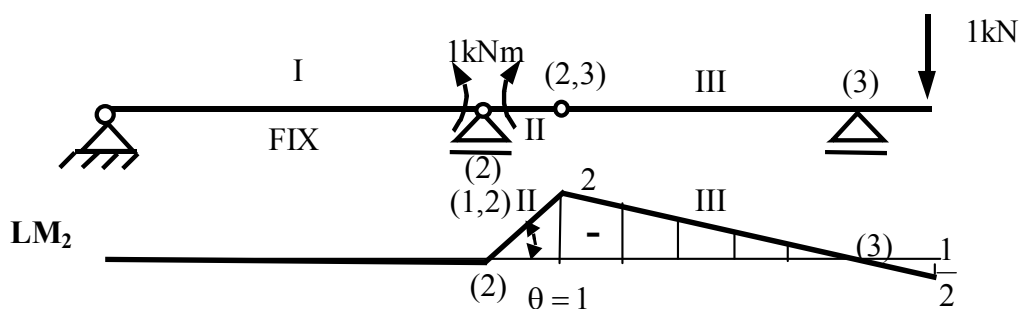


Fig. 6.9

Observație Diagramele de deplasări prezentate în paragraful 5.1 pot fi transformate în linii de influență dacă deplasările virtuale (egale cu unitatea) se imprimă în sens invers acțiunii mărimii statice pentru care s-a trasat diagrama de deplasări și se atașează semnul conform celor prezentate anterior.

6.2.2.2. Determinarea liniilor de influență la grinzi cu zăbrele

Față de grinzile Gerber, trasarea liniilor de influență la grinzile cu zăbrele necesită următoarele elemente suplimentare:

- trebuie precizată calea pe care se deplasează forța unitate (cea superioară sau cea inferioară);
- trebuie stabilită scara.

În vederea stabilirii scării se consideră trei bare articulate între ele (fig. 6.10,a). Se secționează o bară și se pun în evidență eforturile S . Se consideră unul dintre cele două corpuri fix (corpul I) și se dă o deplasare virtuală egală cu unitatea celui alt corp astfel încât punctul C se deplasează pe direcția efortului S , respectiv $CC' = \delta_s = -1$ (fig. 6.10.b).

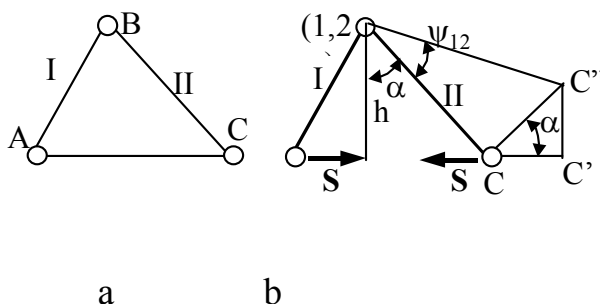


Fig. 6.10

Din figura 6.10,b rezultă

$$CC'' = BC \cdot \psi_{12} = h \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \psi_{12} \quad (6.5,a)$$

$$CC'' = \frac{CC'}{\cos \alpha} = \frac{\delta_s}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (6.5,b)$$

Din relațiile (6.5,a și b) rezultă $\psi_{12} = \frac{1}{h}$. Astfel scara, reprezentată prin ordonata verticală egală cu unitatea, se va construi în interiorul unghiului ψ_{12} la distanța h de centrul relativ (1,2). De remarcat că se trasează numai diagrama de deplasări pe verticală.

Exemplul 6.2. Pentru grinda cu zăbrele din figura 6.11 să se traseze linia de influență a efortului din barele indicate utilizând metoda cinematică. Forța egală cu unitatea se deplasează pe talpa inferioară.

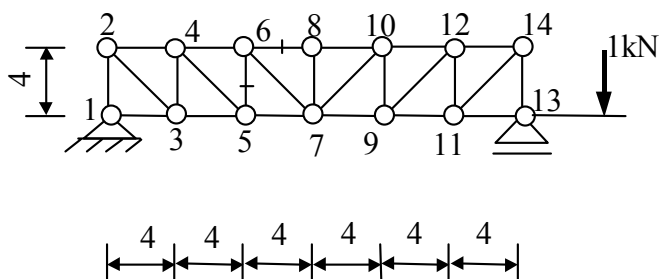


Fig. 6.11

- Linia de influență LS_{68} (fig. 6.12). Se suprimă bara respectivă și se pune în evidență efortul a cărei linie de influență urmează să se traseze. Se determină centrele instantanee de rotație și I se imprimă o deplasare virtuală $\delta s = -1$ pe direcția eforturilor și I se trasează diagrama de deplasări pe verticală (deplasarea virtuală face ca nodurile 6 și 8 să se depărteze, respectiv corpul I are o mișcare de rotație antiorară iar corpul II o mișcare de rotație orară).

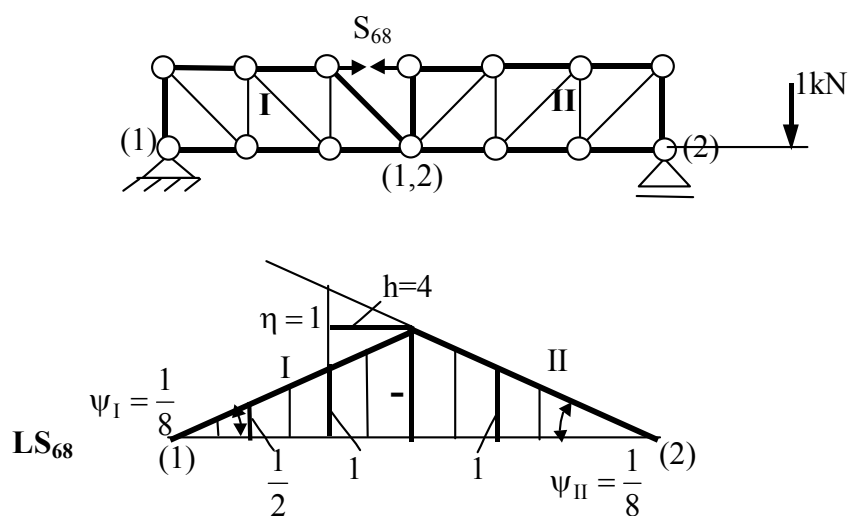


Fig. 6.12

Pentru ca diagrama de deplasări să reprezinte linia de influență i se atașează scara și semnul. Semnul este negativ, deoarece deplasarea se produce în sens invers sensului forței unitate, iar scara se construiește în interiorul unghiului ψ_{12} la distanța $h=4$ față de centrul relativ (1,2).

Din următoarele relații geometrice se pot determina rotirile celor două corpuri, care sunt utilizate la determinarea oricărei ordonate din diagrama de deplasări.

$$\begin{cases} \psi_I + \psi_{II} = \psi_{12} = \frac{1}{h} = \frac{1}{4} \\ 12\psi_I = 12\psi_{II} \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_I = \frac{1}{8} \\ \psi_{II} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Observație Cu ajutorul liniei de influență se poate determina efortul din bara respectivă pentru orice poziție a convoiului de forțe folosind suprapunerea de efecte dată de relația (6.1).

Linia de influență M_{56} (fig. 6.13). Se înlocuiește bara 5-7 cu echivalentul său mecanic obținându-se un mecanism format din patru corpuri.

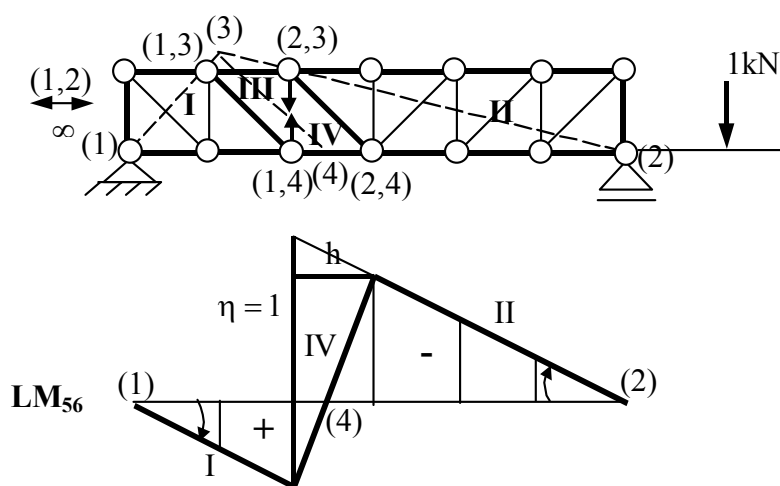


Fig. 6.13

Centrele instantanee de rotație (absolute și relative) se determină utilizând cele două teoreme de coliniaritate, respectiv

$$\begin{array}{lll} (1,2) \begin{cases} (1,2), (2,3), (1,3) \\ (1,2), (2,4), (1,4) \end{cases} & (3,4) \begin{cases} (3,4), (1,3), (1,4) \\ (3,4), (2,3), (2,4) \end{cases} & (1,2) \begin{cases} (1,2), (2,3), (1,3) \\ (1,2), (2,4), (1,4) \end{cases} \\ (2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2) \perp \text{reazem} \end{cases} & (3) \begin{cases} (3), (1,3), (1) \\ (3), (2,3), (2) \end{cases} & (4) \begin{cases} (4), (1,4), (1) \\ (4), (3,4), (3) \end{cases} \end{array}$$

Deoarece centrul relativ (1,2) este la infinit rezultă că cele două corpuri sunt paralele în diagrama de deplasări ($\psi_I = \psi_{II}$). La fel se comportă și corpurile III și IV.

Se imprimă o deplasare virtuală $\delta s = -1$ pe direcția eforturilor și se trasează diagrama de deplasări pe verticală (deplasarea virtuală face ca nodurile 5 și 6 să se depărteze, respectiv corpul I și corpul II au o mișcare de rotație orară). Se atașează diagramei de deplasări scara și semnul. Semnul este pozitiv pe zona cuprinsă sub axa de referință și negativ pentru zona aflată deasupra axei de referință. Scara se construiește în interiorul unghiului ψ_{24} la distanța $h=4$ față de centrul relativ (2,4).

Poziția centrului absolut al corpului IV se determină din relațiile de asemănare ce există în diagrama de deplasări, respective

$$\frac{8\psi_I}{12\psi_{II}} = \frac{4-x}{x}$$

de unde $x = \frac{12}{5} = 2,4$

Din următoarele relații geometrice se pot determina rotirile celor două corpuri, care sunt utilizate la determinarea oricărei ordonate din diagrama de deplasări.

$$\begin{cases} \psi_{IV} + \psi_{II} = \psi_{24} = \frac{1}{h} = \frac{1}{4} \\ 2,4\psi_{IV} = 8\psi_{II} \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_{II} = \frac{1}{5,2} \\ \psi_{IV} = \frac{1}{1,56} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Bănuț, V, Socină, G. - Statica, Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor. Aplicații. Vol. 1. I.C.B., 1978
2. Bănuț, V. - Statica Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor. I.C.B., 1988
3. Cătărig, A., Petrina, M. - Statica Construcțiilor. Metode de calcul și aplicații. Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1991
4. Gherghiu, Al. - Statica, Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor. Vol. 1. Editura Tehnică București, 1960
5. Ifrim, M., Macavei, F., Vlad, I. - Statica Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor. Vol1. Structuri static determinate. ICB, 1987
6. Ivan, M., Vulpe, A., Bănuț, V. – Statica, Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
7. Ivan, M. și alții - Statica, Stabilitatea și dinamica construcțiilor. Teorie și probleme. Editura Tehnică, București, 1997
8. Petcu, V. - Structural Analysis. Lecture Note. Vol I. I.C.B, 1992
9. Răutu, S., Bănuț, V. – Statica Construcțiilor Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972

CUPRINS

Prefață	3
Capitolul I Aspecte generale ale calculului structurilor de rezistență	5
1.1. Obiectul de studiu	5
1.2. Schematizări	5
1.2.1 Schematizarea încărcărilor	5
1.2.2. Schematizarea legăturilor	6
1.2.3. Schematizarea elementelor și structurilor de rezistență	7
1.2.4. Schematizarea comportării materialelor	9
1.2.5. Schematizarea comportării elementelor și structurilor de rezistență	10
1.3. Ipoteze simplificatoare	11
1.4. Clasificarea structurilor	13
1.5. Echilibrul structurii în poziția deformată	17
1.6. Eforturi. Relații între eforturi și încărcări pentru grinda dreaptă	18
1.7. Deformarea structurilor elastice.	20
1.7.1. Noțiuni și teoreme generale	21
1.7.1.1. Lucrul mecanic al forțelor exterioare	21
1.7.1.2. Lucrul mecanic al forțelor interioare.	22
Lucrul mecanic al eforturilor	
1.7.1.3. Lucrul mecanic total	24
1.7.1.4. Teorema lui Clapeyron	25
1.7.2. Calculul deplasărilor elastice	26
1.7.2.1. Relația Maxwell-Mohr	26
1.7.2.2. Calculul practic al deplasărilor elastice	26
1.7.2.3. Regula lui Vereșciaghin	28
1.7.3. Calculul deplasărilor elastice produse de variația de temperatură la structuri static determinate	30
1.7.4. Deplasarea produsă de cedări de reazeme la structuri static determinate	31
Capitolul II Structuri static determinate alcătuite din bare drepte	33
2.1. Grinda dreaptă	34
2.1.1 Grinda în consolă	34
2.1.2. Grinda simplu rezemată	36
2.1.3. Grinda cu consolă	39
2.2. Grinzi compuse	43
2.3. Cadre plane	50

2.3.1. Generalități	50
2.3.2. Cadre simetrice	56
2.3.2.1. Cadre simetrice încărcate simetric	57
2.3.2.2. Cadre simetrice încărcate antisimetric	59
2.4. Acțiunea variațiilor de temperatură și a cedărilor de reazeme la structuri static determinate formate din bare	63
Capitolul III Grinzi cu zăbrele	66
3.1. Generalități	66
3.2. Condiția de invariabilitate geometrică și de determinare statică	68
3.3. Metode pentru determinarea eforturilor din bare	69
3.3.1. Metoda izolării nodurilor	69
3.3.2. Metoda secțiunilor simple	71
3.4. Cazuri particulare de grinzi cu zăbrele	71
3.4.1. Grinda cu zăbrele cu alcătuire triunghiulară	71
3.4.2. Grinda cu zăbrele cu alcătuire dreptunghiulară	73
3.5. Calculul deplasărilor elastice la grinzi cu zăbrele	74
Capitolul IV Arce static determinate	80
4.1. Generalități	80
4.2. Relații diferențiale între eforturi și încărcări la bara curbă	83
4.3. Arcul cu trei articulații	84
4.4. Arcul cu tirant	91
4.5. Arce optime	93
Capitolul V Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual în calculul structurilor static determinate	95
5.1. Generalități	95
5.2. Stabilirea diagramelor de deplasări	97
5.3. Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual la grinzi Gerber	99
5.4. Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual la cadre plane	102
5.5. Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual la grinzi cu zăbrele	105
Capitolul VI Linii de influență	108
6.1. Generalități	108
6.2. Modalități de construire a liniilor de influență	109
6.2.1. Determinarea liniilor de influență pe cale analitică	109
6.2.2. Determinarea liniilor de influență pe cale cinematică	111

6.2.2.1	Determinarea liniilor de influență la grinzi Gerber	112
6.2.2.2.	Determinarea liniilor de influență la grinzi cu zăbrele	115
Bibliografie		119
Cuprins		120

Tiraj	exemplare
Predat	multiplicare
Dactilografiat	Teodorescu Mircea-Eugen Teodorescu Ani-Violeta
Desenat	Teodorescu Mircea-Eugen
Multiplicarea s-a făcut în atelierele U.T.C.B sub comanda nr.	